

DETERMINAN

Matematika Industri I

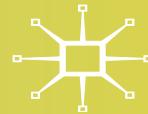
TIP – FTP – UB

Mas'ud Effendi



Pokok Bahasan

- Determinan
- Determinan orde-ketiga
- Persamaan simultan dengan tiga bilangan tidak diketahui
- Konsistensi suatu set persamaan
- Sifat-sifat determinan



Pokok Bahasan

- Determinan
- Determinan orde-ketiga
- Persamaan simultan dengan tiga bilangan tidak diketahui
- Konsistensi suatu set persamaan
- Sifat-sifat determinan



Determinan

- Suatu determinan orde n terdiri dari n^2 bilangan yang disebut elemen-elemen yang tersusun dalam n baris dan n kolom, dan dibatasi oleh dua buah garis vertikal.
 - Huruf = kolom
 - Subskrip = baris

$$D_1 = |a_1|$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$



Determinan

- Persamaan simultan

$$2x + 3y + 2 = 0$$

$$3x + 4y + 6 = 0$$

- Penyelesaian dengan metode eliminasi

$$8x + 12y + 8 = 0$$

$$9x + 12y + 18 = 0$$

- Diperoleh $x + 10 = 0$, sehingga $x = -10$ dan akhirnya $y = 6$



Determinan

- Memecahkan dua persamaan linier simultan: $a_1x + b_1y + d_1 = 0$
 $a_2x + b_2y + d_2 = 0$
- Menghasilkan:
- Mempunyai sebuah solusi yang tersedia

$$x = \frac{b_1d_2 - b_2d_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$y = -\frac{a_1d_2 - a_2d_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$$



Determinan

- Notasi singkat untuk pernyataan $a_1b_2 - a_2b_1$

$$a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

- Simbol: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$
- (dievaluasi dengan perkalian silang) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$
- Disebut determinan orde-kedua (karena determinan ini punya 2 baris dan 2 kolom)



Determinan

- Sehingga:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \quad \text{and} \quad y = -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

- dimana:

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}} = \frac{-y}{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$



Determinan

- Ketiga determinan: $\begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}$ and $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ dapat diperoleh dari kedua persamaan sebagai berikut:

$$a_1x + b_1y + d_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + d_2 = 0$$

omit the constant terms to form $\Delta_0 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

omit the x terms to form $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}$

omit the y terms to form $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}$



Determinan

- Persamaan:

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}} = \frac{-y}{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

- Dapat ditulis sebagai:

$$\frac{x}{\Delta_1} = \frac{-y}{\Delta_2} = \frac{1}{\Delta_0}$$



Contoh

- Perhatikan persamaan:

$$3x+2y-5=0$$

$$4x+3y-7=0$$

- $a_1b_2 - a_2b_1 = 1$

$$\frac{x}{1} = \frac{-y}{-1} = \frac{1}{1}$$

$$x = y = 1$$

- Ingat!

$$a_1x + b_1y + d_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + d_2 = 0$$

$$a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}} = \frac{-y}{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$



Pokok Bahasan

- Determinan
- Determinan orde-ketiga
- Persamaan simultan dengan tiga bilangan tidak diketahui
- Konsistensi suatu set persamaan
- Sifat-sifat determinan



Determinan Orde-Ketiga

- Sebuah determinan orde-ketiga punya 3 baris dan 3 kolom.
- Setiap elemen determinan dikaitkan dengan minornya yang diperoleh dengan menghilangkan baris dan kolom yang berisi elemen yang bersangkutan.
- Sebagai contoh:

the minor of a_1 is $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ obtained thus

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$



Determinan Orde-Ketiga

- Menentukan nilai determinan orde-ketiga
 - Untuk menguraikan determinan orde-ketiga, kita dapat menulis masing-masing elemen di sepanjang baris atas, mengalikannya dengan minornya, dan memberi suku-sukunya tanda plus dan minus secara bergantian

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$



Determinan Orde-Ketiga

- Menentukan nilai determinan dengan mengekspansi pada sebarang baris dan kolom

$$\begin{array}{cccccccc} + & - & + & - & \cdots & \cdots & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots & \cdots & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots & \cdots & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$



Contoh

- Contoh 1

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 54 + 12 = -30$$

- Contoh 2

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 12 - 64 + 22 = -30$$



Pokok Bahasan

- **Determinan**
- **Determinan orde-ketiga**
- **Persamaan simultan dengan tiga bilangan tidak diketahui**
- **Konsistensi suatu set persamaan**
- **Sifat-sifat determinan**



Persamaan Simultan Dengan Tiga Bilangan Tidak Diketahui

- Persamaan: $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$
 $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$
 $a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0$
- Punya solusi:

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}} = \frac{-y}{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}} = \frac{-1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

- Lebih mudah diingat sebagai:

$$\frac{x}{\Delta_1} = \frac{-y}{\Delta_2} = \frac{z}{\Delta_3} = \frac{-1}{\Delta_0}$$



Contoh

- Cari nilai x dari persamaan:

$$2x+3y-z-4=0$$

$$3x+y+2z-13=0$$

$$x+2y-5z+11=0$$

$$\frac{x}{\Delta_1} = \frac{-y}{\Delta_2} = \frac{z}{\Delta_3} = \frac{-1}{\Delta_0}$$

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -13 \\ 2 & -5 & 11 \end{vmatrix}} = \frac{-1}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix}}$$

$$\frac{x}{-56} = \frac{-1}{28}$$

$$\therefore x = 2$$



Pokok Bahasan

- **Determinan**
- **Determinan orde-ketiga**
- **Persamaan simultan dengan tiga bilangan tidak diketahui**
- **Konsistensi suatu set persamaan**
- **Sifat-sifat determinan**



Konsistensi Suatu Set Persamaan

- Perhatikan!

$$3x - y - 4 = 0$$

$$2x + 3y - 8 = 0$$

$$x - 2y + 3 = 0$$

- Perhatikan lagi!

$$3x + y - 5 = 0$$

$$2x + 3y - 8 = 0$$

$$x - 2y + 3 = 0$$



Konsistensi Suatu Set Persamaan

- Tiga persamaan simultan dengan dua bilangan tidak diketahui akan konsisten jika determinan koefisiennya adalah nol

$$\begin{array}{l} a_1x + b_1y + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + d_2 = 0 \\ a_3x + b_3y + d_3 = 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{array} \right| = 0$$



Konsistensi Suatu Set Persamaan

- Contoh uji konsistensi

$$2x + y - 5 = 0$$

$$x + 4y + 1 = 0$$

$$3x - y - 10 = 0$$

- Tentukan nilai k agar set persamaan konsisten

$$3x + y + 2 = 0$$

$$4x + 2y - k = 0$$

$$2x - y + 3k = 0$$



Pokok Bahasan

- Determinan
- Determinan orde-ketiga
- Persamaan simultan dengan tiga bilangan tidak diketahui
- Konsistensi suatu set persamaan
- Sifat-sifat determinan



Sifat-sifat Determinan

1. Nilai suatu determinan tetap tidak berubah jika barisnya diubah menjadi kolom dan kolom menjadi baris
2. Jika dua baris (atau kolom) disaling-tukarkan, tanda determinan tersebut berubah

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$



Sifat-sifat Determinan

3. Jika dua baris (atau kolom) identik, nilai determinan tersebut sama dengan nol
4. Jika elemen sebarang satu baris (atau kolom) semuanya dikalikan dengan faktor persekutuan, determinannya dikalikan dengan faktor tsb

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$



Sifat-sifat Determinan

5. Jika elemen sebarang baris (atau kolom) diperbesar (atau dikurangi) oleh kelipatan elemen yang sama dari elemen yang bersesuaian dari baris (atau kolom) lain, nilai determinan tersebut tidak berubah

$$\begin{vmatrix} a_1 + kb_1 & b_1 \\ a_2 + kb_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \text{ and } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 + ka_1 & b_2 + kb_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$



Hasil Pembelajaran

- Mengekspansi suatu determinan 2×2
- Menyelesaikan pasangan persamaan linier simultan dengan dua variabel menggunakan determinan 2×2
- Mengekspansi suatu determinan 3×3
- Menyelesaikan tiga persamaan linier simultan dengan tiga variabel menggunakan determinan 3×3
- Menentukan konsistensi dari set-set persamaan linier simultan
- Menggunakan sifat-sifat determinan untuk menyelesaikan persamaan yang ditulis dalam bentuk determinan



Referensi

- Stroud, KA & DJ Booth. 2003. *Matematika Teknik*. Erlangga. Jakarta
- Ayres, Frank and Philip A Schimidt. 2003. *Matematika Universitas*. Erlangga. Jakarta.

