

MATRIKS

Matematika Industri I

TIP – FTP – UB

Mas'ud Effendi



Pokok Bahasan

- **Matriks – definisi**
- **Notasi matriks**
- **Matriks yang sama**
- **Panambahan dan pengurangan matriks**
- **Perkalian matriks**
- **Transpos suatu matriks**
- **Matriks khusus**
- **Determinan suatu matriks bujursangkar**
- **Invers suatu matriks bujursangkar**
- **Penyelesaian set persamaan linier**
- **Nilai-eigen dan vektor-eigen**



Pokok Bahasan

- **Matriks – definisi**
- **Notasi matriks**
- **Matriks yang sama**
- **Panambahan dan pengurangan matriks**
- **Perkalian matriks**
- **Transpos suatu matriks**
- **Matriks khusus**
- **Determinan suatu matriks bujursangkar**
- **Invers suatu matriks bujursangkar**
- **Penyelesaian set persamaan linier**
- **Nilai-eigen dan vektor-eigen**



Matriks - Definisi

- Matriks adalah set bilangan real atau bilangan kompleks (disebut elemen-elemen) yang disusun dalam baris dan kolom sehingga membentuk jajaran persegi panjang (*rectangular array*).
- Sebuah matriks yang memiliki m baris dan n kolom disebut matriks $m \times n$.
- Sebagai contoh:
$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 2 \\ 6 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$
- Adalah sebuah matriks 2×3 .



Matriks - Definisi

- *Matriks baris*

- Suatu matriks yang hanya terdiri atas 1 baris saja. Sebagai contoh: $(4 \ 3 \ 7 \ 2)$

- *Matriks kolom*

- Suatu matriks yang hanya terdiri atas 1 kolom saja. Sebagai contoh: $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$



Matriks - Definisi

- *Notasi akhiran ganda*
 - Setiap elemen dalam suatu matriks memiliki “alamat” atau tempat tertentu sendiri yang dapat didefinisikan dengan suatu sistem akhiran ganda, yang pertama menyatakan baris dan yang kedua menyatakan kolom. Sebagai contoh, elemen matriks 3×4 dapat ditulis sebagai:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$



Pokok Bahasan

- **Matriks – definisi**
- **Notasi matriks**
- **Matriks yang sama**
- **Panambahan dan pengurangan matriks**
- **Perkalian matriks**
- **Transpos suatu matriks**
- **Matriks khusus**
- **Determinan suatu matriks bujursangkar**
- **Invers suatu matriks bujursangkar**
- **Penyelesaian set persamaan linier**
- **Nilai-eigen dan vektor-eigen**



Notasi Matriks

Jika tidak menimbulkan keraguan, keseluruhan matriks dapat dinyatakan dengan suatu elemen umum tunggal yang ditulis dalam tanda kurung, atau dengan sebuah huruf tunggal yang dicetak-tebal.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \text{ can be denoted by } (a_{ij}) \text{ or by } \mathbf{A}$$



Pokok Bahasan

- **Matriks – definisi**
- **Notasi matriks**
- **Matriks yang sama**
- **Panambahan dan pengurangan matriks**
- **Perkalian matriks**
- **Transpos suatu matriks**
- **Matriks khusus**
- **Determinan suatu matriks bujursangkar**
- **Invers suatu matriks bujursangkar**
- **Penyelesaian set persamaan linier**
- **Nilai-eigen dan vektor-eigen**



Matriks yang Sama

- Dua matriks dikatakan sama jika elemen yang berkorespondensi semuanya sama

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \text{ that is } (a_{ij}) = (b_{ij}) \text{ if } a_{ij} = b_{ij}$$



Pokok Bahasan

- **Matriks – definisi**
- **Notasi matriks**
- **Matriks yang sama**
- **Panambahan dan pengurangan matriks**
- **Perkalian matriks**
- **Transpos suatu matriks**
- **Matriks khusus**
- **Determinan suatu matriks bujursangkar**
- **Invers suatu matriks bujursangkar**
- **Penyelesaian set persamaan linier**
- **Nilai-eigen dan vektor-eigen**



Penambahan dan Pengurangan Matriks

- Agar dapat ditambahkan atau dikurangkan, dua matriks haruslah berorde sama
- Jumlah atau selisihnya ditentukan dengan cara menambahkan atau mengurangkan elemen-elemen yang berkorespondensi.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4+1 & 2+8 & 3+9 \\ 5+3 & 7+5 & 6+4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 10 & 12 \\ 8 & 12 & 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



Pokok Bahasan

- **Matriks – definisi**
- **Notasi matriks**
- **Matriks yang sama**
- **Panambahan dan pengurangan matriks**
- **Perkalian matriks**
- **Transpos suatu matriks**
- **Matriks khusus**
- **Determinan suatu matriks bujursangkar**
- **Invers suatu matriks bujursangkar**
- **Penyelesaian set persamaan linier**
- **Nilai-eigen dan vektor-eigen**



Perkalian Matriks

- Perkalian skalar
 - Untuk mengalikan suatu matriks dengan bilangan tunggal (yakni suatu skalar), masing-masing elemen matriks harus dikalikan dengan faktor tersebut. Contoh:

$$4 \times \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 6 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 8 & 20 \\ 24 & 4 & 28 \end{pmatrix}$$

$$k \begin{pmatrix} a_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{ij} \end{pmatrix}$$



Perkalian Matriks

- Perkalian dua buah matriks

- Dua matriks dapat dikalikan satu sama lain apabila jumlah kolom dalam matriks pertama sama dengan jumlah baris pada matriks kedua
- Setiap elemen dalam baris ke- i \mathbf{A} dikalikan dengan elemen yang berkorespondensi dalam kolom ke- i \mathbf{B} dan hasilnya ditambahkan

$$\text{If } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \text{ and } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{23} \end{pmatrix}$$

$$\text{then } \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} \end{pmatrix}$$

If $\mathbf{A} = (a_{ij})$ is an $n \times m$ matrix and

$\mathbf{B} = (b_{ij})$ is an $m \times q$ matrix then

$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (c_{ij})$ is an $n \times q$ matrix where

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj}$$



Pokok Bahasan

- Matriks – definisi
- Notasi matriks
- Matriks yang sama
- Penambahan dan pengurangan matriks
- Perkalian matriks
- **Transpos suatu matriks**
- Matriks khusus
- Determinan suatu matriks bujursangkar
- Invers suatu matriks bujursangkar
- Penyelesaian set persamaan linier
- Nilai-eigen dan vektor-eigen



Transpos Suatu Matriks

- Jika sebuah matriks disalingtukarkan antara baris dan kolomnya, maka matriks baru yang terbentuk disebut transpos dari matriks aslinya. Sebagai contoh:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \text{ then } \mathbf{A}^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 2 \\ 6 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$



Pokok Bahasan

- Matriks – definisi
- Notasi matriks
- Matriks yang sama
- Penambahan dan pengurangan matriks
- Perkalian matriks
- Transpos suatu matriks
- **Matriks khusus**
- Determinan suatu matriks bujursangkar
- Invers suatu matriks bujursangkar
- Penyelesaian set persamaan linier
- Nilai-eigen dan vektor-eigen



Matriks Khusus

- Matriks bujursangkar

- Matriks dengan orde $m \times m$

- Matriks bujursangkar dikatakan simetrik jika $a_{ij}=a_{ji} \rightarrow$

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}^T \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 8 & 9 \\ 5 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

- Matriks bujursangkar dikatakan simetrik-miring jika

$$a_{ij}=-a_{ji} \rightarrow \mathbf{A}=-\mathbf{A}^T \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & 9 \\ -5 & -9 & 0 \end{pmatrix}$$



Matriks Khusus

- Matriks diagonal
 - Matriks bujursangkar yang semua elemennya nol kecuali elemen yang berada pada diagonal utamanya

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$



Matriks Khusus

- Matriks satuan/identitas (**I**)
 - Matriks diagonal yang elemen-elemen pada diagonal utamanya semuanya satu
 - Hasil kali antara **A** dengan **I** akan menghasilkan **A**
A.I=A=I.A

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Matriks Khusus

- Matriks nol
 - Matriks yang semua elemennya adalah nol dan dinyatakan dengan **0**

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Maka **$\mathbf{A} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$**
- Tetapi jika **$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0}$** , kita tidak dapat mengatakan **$\mathbf{A} = \mathbf{0}$** atau **$\mathbf{B} = \mathbf{0}$**



Pokok Bahasan

- **Matriks – definisi**
- **Notasi matriks**
- **Matriks yang sama**
- **Panambahan dan pengurangan matriks**
- **Perkalian matriks**
- **Transpos suatu matriks**
- **Matriks khusus**
- **Determinan suatu matriks bujursangkar**
- **Invers suatu matriks bujursangkar**
- **Penyelesaian set persamaan linier**
- **Nilai-eigen dan vektor-eigen**



Determinan Suatu Matriks Bujursangkar

- Determinan yang memiliki elemen yang sama dengan elemen matriksnya

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 3 \\ 8 & 4 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 3 \\ 8 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 150$$

- Determinan matriks bujursangkar memiliki nilai yang sama seperti nilai determinan matriks transposnya

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 3 \\ 8 & 4 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 0 & 8 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 5 & 0 & 8 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 150$$

- Matriks yang determinannya nol disebut matriks singular



Determinan Suatu Matriks Bujursangkar

- Kofaktor

- Jika $\mathbf{A}=(a_{ij})$ adalah suatu matriks bujursangkar, setiap elemen menghasilkan kofaktor, minor dari elemen dalam determinan beserta ‘tanda tempatnya’

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 3 \\ 8 & 4 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \det A = |A| = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 3 \\ 8 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 150$$

kofaktor

$$5 \rightarrow +(42 - 12) = +30$$

$$2 \rightarrow -(0 - 24) = +24$$



Determinan Suatu Matriks Bujursangkar

- Adjoin suatu matriks bujursangkar
 - Misal matriks bujursangkar **C** dibentuk dari matriks bujursangkar **A** dimana elemen-elemen **C** secara respektif merupakan kofaktor dari elemen **A**, maka:
$$\mathbf{A} = (a_{ij}) \text{ and } A_{ij} \text{ is the cofactor of } a_{ij} \text{ then } \mathbf{C} = (A_{ij})$$
 - Transpos dari **C** disebut adjoin **A**, dinotasikan **adj A**.



Determinan Suatu Matriks Bujursangkar

- Contoh $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$
- Jika C adalah matriks kofaktor dari A ,
maka $C = \begin{pmatrix} -24 & 6 & 15 \\ 20 & -5 & -5 \\ 13 & 8 & -10 \end{pmatrix}$
- $\text{Adj } A = C^T = \begin{pmatrix} -24 & 20 & 13 \\ 6 & -5 & 8 \\ 15 & -5 & -10 \end{pmatrix}$



Pokok Bahasan

- **Matriks – definisi**
- **Notasi matriks**
- **Matriks yang sama**
- **Panambahan dan pengurangan matriks**
- **Perkalian matriks**
- **Transpos suatu matriks**
- **Matriks khusus**
- **Determinan suatu matriks bujursangkar**
- **Invers suatu matriks bujursangkar**
- **Penyelesaian set persamaan linier**
- **Nilai-eigen dan vektor-eigen**



Invers Suatu Matriks Bujursangkar

- Jika setiap elemen adjoin matriks bujursangkar \mathbf{A} dibagi dengan determinan \mathbf{A} , yaitu $|\mathbf{A}|$, maka matriks yang dihasilkan disebut invers \mathbf{A} dan dinyatakan dengan \mathbf{A}^{-1} .

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} (\text{adj} \mathbf{A})$$

- *Note:* jika $\det \mathbf{A} = 0$ maka invers tidak ada



Invers Suatu Matriks Bujursangkar

- $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \det A = |A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 45$

- $\text{Adj } \mathbf{A} = C^T = \begin{pmatrix} -24 & 20 & 13 \\ 6 & -5 & 8 \\ 15 & -5 & -10 \end{pmatrix}$

- $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{24}{45} & \frac{20}{45} & \frac{13}{45} \\ \frac{6}{45} & -\frac{5}{45} & \frac{8}{45} \\ \frac{15}{45} & -\frac{5}{45} & -\frac{10}{45} \end{pmatrix} = \frac{1}{45} \begin{pmatrix} -24 & 20 & 13 \\ 6 & -5 & 8 \\ 15 & -5 & -10 \end{pmatrix}$



Invers Suatu Matriks Bujursangkar

- Hasil kali suatu matriks bujursangkar dengan inversnya, dengan urutan manapun faktor-faktornya ditulis, ialah matriks satuan dengan orde matriks yang sama:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$$



Pokok Bahasan

- **Matriks – definisi**
- **Notasi matriks**
- **Matriks yang sama**
- **Panambahan dan pengurangan matriks**
- **Perkalian matriks**
- **Transpos suatu matriks**
- **Matriks khusus**
- **Determinan suatu matriks bujursangkar**
- **Invers suatu matriks bujursangkar**
- **Penyelesaian set persamaan linier**
- **Nilai-eigen dan vektor-eigen**



Penyelesaian Set Persamaan Linier

- Set n persamaan linier simultan dengan n bilangan tidak diketahui

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

- Dapat ditulis dalam bentuk matriks:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \text{that is } \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$



Penyelesaian Set Persamaan Linier

- Karena:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ then}$$

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b} \text{ that is}$$

$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b} \text{ and } \mathbf{I} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$$

- Solusi:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$$



Penyelesaian Set Persamaan Linier

- Set persamaan linier

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$$

$$3x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 2$$

$$5x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -1$$

- Penyelesaian $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & -2 \\ 5 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{35} \begin{pmatrix} -14 & -7 & 0 \\ -25 & 0 & 5 \\ 29 & 7 & -10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{35} \begin{pmatrix} -70 \\ -105 \\ 140 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$



Penyelesaian Set Persamaan Linier

- Metode eliminasi Gauss untuk penyelesaian set persamaan linier

- Diberikan:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

- Buat matriks augmen **B**, dimana:

$$\mathbf{B} = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array} \right)$$



Penyelesaian Set Persamaan Linier

Eliminasi elemen-elemen selain a_{11} dari kolom pertama dengan mengurangkan a_{21}/a_{11} kali baris pertama dari baris kedua dan a_{31}/a_{11} kali baris pertama dari baris ketiga, dst

Matriks baru yang terbentuk:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & c_{n2} & c_{n3} & \cdots & c_{nn} & d_n \end{array} \right)$$



Penyelesaian Set Persamaan Linier

- Proses ini kemudian diulangi untuk mengeliminasi c_{i2} dari baris yang ketiga dan yang berikutnya sampai diperoleh matriks dalam bentuk berikut:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \cdots & p_{n-3,n-2} & p_{n-2,n-1} & p_{n-2,n} & q_2 \\ 0 & \cdots & 0 & p_{n-1,n-1} & p_{n-1,n} & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & p_{nn} & q_n \end{array} \right)$$



Penyelesaian Set Persamaan Linier

- Matriks segitiga yang telah terbentuk dari matriks augmen, kita pisahkan kolom kanan kembali ke posisi semula

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & \cdots & p_{n-3,n-2} & p_{n-2,n-1} & p_{n-2,n} \\ 0 & \cdots & 0 & p_{n-1,n-1} & p_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$$

- Hasil ini memberikan solusi :

$$p_{nn} x_n = q_n \quad \text{so} \quad x_n = \frac{q_n}{p_{nn}}$$



Penyelesaian Set Persamaan Linier

- Set persamaan linier

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 3$$

$$2x_1 - x_2 - x_3 = 11$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = -5$$

- Dapat ditulis

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ -5 \end{pmatrix}$$

- Matriks augmennya menjadi

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 11 \\ 3 & 2 & 1 & -5 \end{array} \right)$$

- Sekarang

- Kurangkan $2/1$ kali baris pertama dari baris kedua
- Kurangkan $3/1$ kali baris pertama dari baris ketiga

- Proses menghasilkan

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -5 & 5 & 5 \\ 0 & -4 & 10 & -14 \end{array} \right)$$

- Sekarang

- Kurangkan $\frac{-4}{-5}$, yakni $\frac{4}{5}$, kali baris kedua dari baris ketiga

- Matriks segitiga terbentuk

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & -18 \end{array} \right)$$

- Dipisahkan kembali

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -18 \end{pmatrix}$$

- Sehingga $x_3 = -3$, kemudian $x_2 = -4$ dan $x_1 = 2$



Pokok Bahasan

- Matriks – definisi
- Notasi matriks
- Matriks yang sama
- Penambahan dan pengurangan matriks
- Perkalian matriks
- Transpos suatu matriks
- Matriks khusus
- Determinan suatu matriks bujursangkar
- Invers suatu matriks bujursangkar
- Penyelesaian set persamaan linier
- **Nilai-eigen dan vektor-eigen**



Nilai-eigen dan Vektor-eigen

- Persamaan dalam bentuk:
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$
- Dimana \mathbf{A} adalah matriks bujursangkar dan λ adalah bilangan (skalar) yang punya solusi non-trivial, yakni ($\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$), untuk \mathbf{x} disebut *vektor-eigen* atau *vektor karakteristik* \mathbf{A} .
- Nilai λ disebut nilai-eigen, nilai karakteristik atau akar laten dari matriks \mathbf{A} .



Nilai-eigen dan Vektor-eigen

- Dinyatakan sebagai set persamaan yang terpisah:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- yakni $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = \lambda x_1$
 $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = \lambda x_2$
...
 $a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = \lambda x_n$



Nilai-eigen dan Vektor-eigen

- Persamaan ini dapat disederhanakan menjadi:

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

- sehingga:

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\cdot\mathbf{x}=\mathbf{0}$$

- Yang berarti, solusi non-trivial:

$$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=0$$



Nilai-eigen dan Vektor-eigen

- Nilai-eigen

- Untuk mencari nilai-eigen dari:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

- Selesaikan persamaan karakteristik $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0$:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

- sehingga: $(\lambda - 1)(\lambda - 5) = 0$

- Nilai-eigen $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 5$



Nilai-eigen dan Vektor-eigen

- Vektor-eigen

- Untuk mencari vektor-eigen dari $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

- Selesaikan persamaan $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$

- Untuk nilai-eigen $\lambda = 1$ dan $\lambda = 5$

For $\lambda=1$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ and so } x_2 = -3x_1 \text{ giving eigenvector } \begin{pmatrix} k \\ -3k \end{pmatrix}$$

For $\lambda=5$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ and so } x_2 = x_1 \text{ giving eigenvector } \begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix}$$



Hasil Pembelajaran

- Mendefinisikan suatu matriks
- Memahami apa yang dimaksud dengan kesamaan dua matriks
- Menambahkan dan mengurangi dua matriks
- Mengalikan suatu matriks dengan suatu skalar dan mengalikan dua matriks
- Memperoleh transpos suatu matriks
- Mengenali jenis-jenis matriks khusus
- Memperoleh determinan, kofaktor, dan adjoin matriks bujursangkar
- Memperoleh invers matriks non-singular
- Menggunakan matriks untuk menyelesaikan set persamaan linier dengan matriks invers
- Menggunakan metode eliminasi Gauss untuk menyelesaikan set persamaan linier
- Menentukan nilai-eigen dan vektor-eigen



Referensi

- Stroud, KA & DJ Booth. 2003. *Matematika Teknik*. Erlangga. Jakarta

