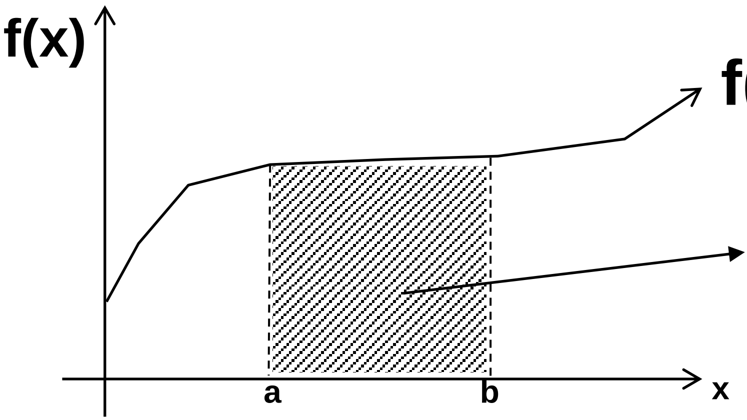
INTEGRASI NUMERIK 1

Matematika Industri II

TIP – FTP – UB

Definisi

- Mengintegrasikan = memadukan bersama = menjumlahkan total



$$\int_a^b f(x)dx$$

- Mengapa ada integrasi numerik?

  Karena integrasi numerik digunakan untuk menyelesaikan integral yang sulit diselesaikan secara analitik

Definisi

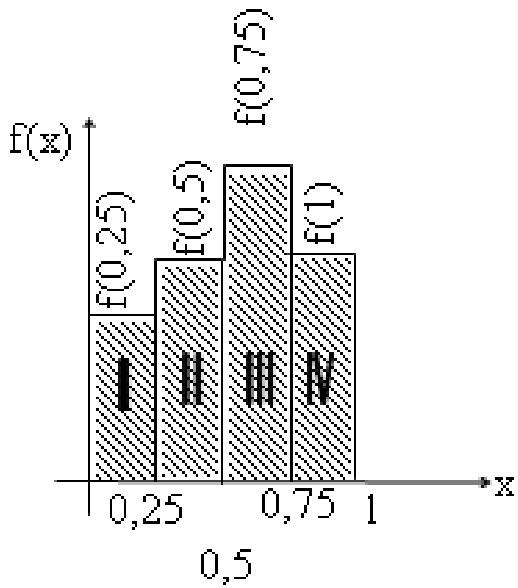
- Contoh : $\int_0^2 \frac{x^2\sqrt{e^{2x-1}}}{(x-1)}\,dx$

  $\Rightarrow$ sulit diselesaikan secara analitis (dengan teori kalkulus yang ada)

Cara Penyelesaian

- Melalui pendekatan kurva

x	f(x)
0	. . . . . .
0,25	. . . . . .
0,5	. . . . . .
0,75	. . . . . .
	. . . . . .
	. . . . . .
2	. . . . . .



Luas kotak I = 0,25 * f(0)
Luas kotak II = 0,25 * f(0,25)

Luas total = luas kotak I + luas kotak II
+ . . . . . .

Semakin kecil interval, hasil semakin teliti karena semakin besar interval, kesalahan semakin besar

Cara Penyelesaian

- Alternatif pemecahan (jika tidak dengan penyelesaian analitis)
  - Memplot grafik tersebut pada kertas berpetak segi empat (dijumlah luas setiap kotak)
  - Membuat segmen-segmen vertikal (mirip diagram batang), menjumlah (luas setiap segmen vertikal).
  - Integrasi numerik

Integrasi Newton Cotes

- Perhitungan integrasi numerik yang paling umum adalah formula Newton Cotes.
- Strategi dari formula ini adalah mengganti yang rumit atau data yang hilang dengan beberapa fungsi aproksimasi yang mudah diintegrasikan.

Integrasi Newton Cotes

- Jika diketahui suatu f(x) pada interval [a,b], nilai integral

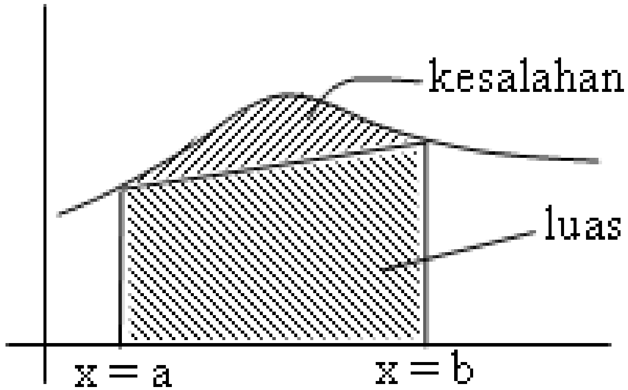
$$I = \int_a^b f(x)dx$$

  bisa didekati dengan Newton Cotes orde n.
- Bentuk umum Newton Cotes orde n $\rightarrow$

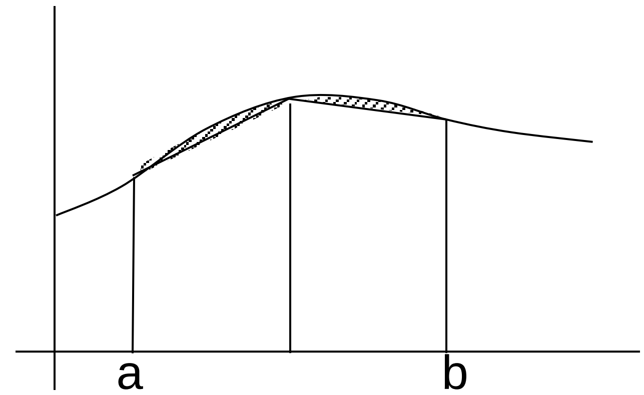
$$f(n) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

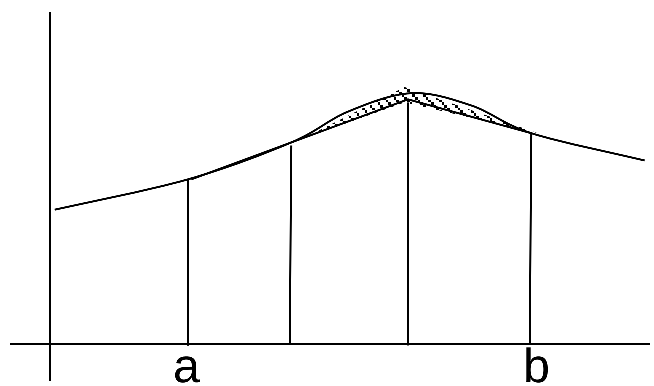
Integrasi Newton Cotes

$$f(n) = a_0 + a_1 x$$



$$f_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$





$$f_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

Integrasi Newton Cotes

- Semakin tinggi orde Newton yang digunakan sebagai pendekatan perhitungan, akan semakin kecil kesalahan yang dihasilkan.
- Pendekatan Newton Cotes orde ke-n $\rightarrow$ perlu (n+1) titik.
- Dalam formula Newton Cotes
  - Metode tertutup $\rightarrow$ batas awal dan batas akhir diketahui
  - Metode terbuka $\rightarrow$ batas integrasi diperluas di luar rentangan (ekstapoksi)

Metode Trapesium

- Metode ini adalah bagian dari metode integrasi Newton tertutup dengan menggunakan aproksimasi polinomial orde 1, sehingga dengan aturan trapesium.

$$I = \int_a^b f_1(x)\,dx$$

$\Rightarrow$ Newton Cotes orde 1

$$I = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

$\Rightarrow$ Rumus ini berpadanan dengan rumus geometri dari trapesium, dengan lebar sebesar (b–a) dan tinggi rata-rata $\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$

Metode Trapesium

- Besarnya kesalahan untuk aturan trapesium tunggal adalah :

$$\varepsilon_a = -\frac{1}{12}\overline{f''}(b-a)^3$$

$\overline{f''}$ adalah nilai rata-rata dari turunan ke-2 yang dirumuskan sebagai

$$\overline{f''} = \frac{\int_a^b f''(x)}{b-a}$$

Contoh Metode Trapesium

- Diketahui suatu fungsi $f(x) = (x+1)e^{x}$
  - Hitung nilai analitis dari $\int_{0}^{2} f(x)dx$
  - Hitung nilai integral di atas dengan aturan trapesium tunggal pada batas x = 0 sampai dengan x = 2
  - Hitung nilai ε_t dan ε_a

Contoh Metode Trapesium

$$\int_0^2 (x+1)e^x dx = u.v - \int v.du$$

Secara eksak

- u = x + 1 dv = e^x.dx
- du = dx v = $\int e^x dx = e^x$

$$\int_0^2 (x+1)e^x dx = (x+1).e^x - \int e^x dx \Big]_0^2$$

$$= (x+1)e^x - e^x \Big]_0^2$$

$$= \left[(2+1).e^2 - e^2\right] - \left[(0+1).e^0 - e^0\right]$$

$$= 3.e^2 - e^2 - 0$$

$$= 2.e^2$$ = 14,778

Contoh Metode Trapesium

- Dengan aturan trapesium tunggal

$$I = (b - a)\frac{f(a) + f(b)}{2}$$; b = 2; a = 0

$$f(a) = f(0) = (0 + 1).e^{0} = 1$$

$$f(b) = f(2) = (2 + 1).e^{2} = 3.e^{2} = 22{,}167$$

$$I = (2 - 0)\frac{(1) + (22{,}167)}{2} = 23{,}167$$

Contoh Metode Trapesium

- Kesalahan

$$\varepsilon_t = \left| \frac{14{,}778 - 23{,}167}{14{,}778} \right| * 100\% = 56{,}767\%$$

ε_t (tidak dalam persen)

ε_t = |14,778 – 23,167| = 8,389

Contoh Metode Trapesium

- ε_a = ?

$$f(x) = (x+1).e^x$$

$$f'(x) = e^x + (x+1).e^x = (x+2).e^x$$

$$f''(x) = e^x + (x+2).e^x = (x+3).e^x$$

$$\overline{f''} = \frac{\int_0^2 (x+3).e^x.dx}{(2-0)}$$

Contoh Metode Trapesium

$$\int_0^2 (x+3).e^x.dx = u.v - \int v.du$$

u = x + 3 dv = e^x.dx

du = dx $v = \int e^x.dx = e^x$

$$\int_0^2 (x+3).e^x.dx = (x+3).e^x - \int e^x.dx \Big]_0^2$$

$$= (x+3).e^x - e^x \Big]_0^2$$

$$= \left[(2+3).e^2 - e^2\right] - \left[(0+3).e^0 - e^0\right]$$

$$= 5.e^2 - e^2 - 2 = 4e^2 - 2 = 27{,}556$$

Metode Trapesium (Ex.)

$$\overline{f''} = \frac{27{,}556}{(2-0)} = 13{,}778$$

$$\varepsilon_a = \left| -\frac{1}{12}.\overline{f''}(b-a)^3 \right|$$

$$= \left| -\frac{1}{12}(13{,}778).(2-0)^3 \right|$$

$$= \left| -9{,}185 \right|$$

$$= 9{,}185$$