
Dasar Ekonomi Teknik: Matematika Uang

Ekonomi Teknik
TIP – FTP – UB

Bahasan

- Aliran Kas (*Cash Flow*)
 - Time Value of Money
 - Bunga
 - Ekuivalensi
-

Cash Flow

- Tata aliran uang masuk dan keluar per periode waktu pada suatu perusahaan
 - Aliran kas akan terjadi jika ada perpindahan uang tunai atau sejenis dari satu pihak ke pihak lain
 - *Cash flow* terdiri dari
 - *Cash in* (uang masuk) → hasil penjualan / manfaat terukur (*benefit*)
 - *Cash out* (uang keluar) → kumulatif biaya (*cost*) yang dikeluarkan
-

Cash Flow

- Terima uang / cek → aliran kas masuk
- Keluar uang / cek → aliran kas keluar
- Jika terima dan keluar uang pada waktu bersamaan → aliran kas netto

Aliran kas netto = penerimaan – pengeluaran

- Aliran kas terjadi di akhir periode
-

Kelompok Aliran Kas

1. Aliran kas awal (initial cash flow) yaitu semua aliran kas yang terjadi sebelum aset dapat dioperasikan
 2. Aliran kas operasi (operating cash flow) yaitu konsekuensi dari pengoperasian aset. Pada umumnya ada aliran pendapatan dan aliran biaya.
 3. Aliran kas akhir (terminal cash flow) yaitu konsekuensi dari diakhirinya pengoperasian aset.
-

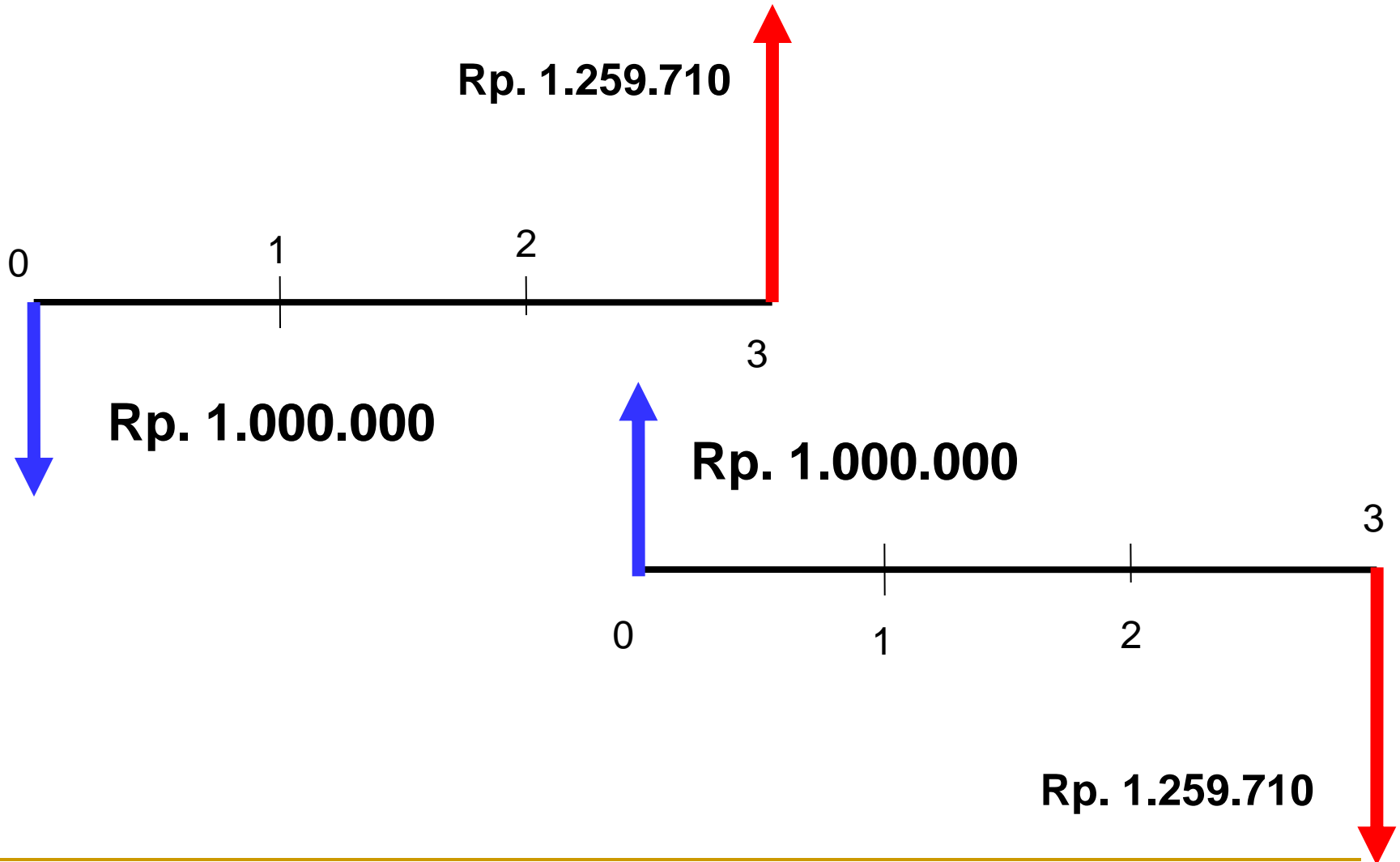
Diagram Aliran Kas

- Ilustrasi grafis dari transaksi-transaksi ekonomi yang dilukiskan pada garis skala waktu
 - Segmen
 - Garis horisontal menunjukkan skala waktu
 - Garis vertikal menunjukkan aliran kas
-

Segmen Diagram Aliran Kas

- Garis horisontal menunjukkan skala waktu
 - Membesar dari kiri ke kanan
 - Titik nol menunjukkan saat ini
 - Garis vertikal menunjukkan aliran kas
 - Panjang skala tidak harus mencerminkan skala besar transaksi
 - Transaksi yang lebih besar, panah lebih panjang
 - Panah ke atas menunjukkan kas positif (penerimaan)
 - Panah ke bawah menunjukkan kas negatif (pengeluaran)
-

Contoh Diagram Aliran Kas



Time Value of Money

- Konsep matematis uang
 - Konsep jumlah uang
 - Konsep nilai uang
 - Nilai uang berubah bersamaan dengan perubahan waktu
 - Satu rupiah sekarang lebih bernilai (lebih disukai) daripada satu rupiah yang diterima di masa depan.
 - Peluang investasi
 - Penurunan purchasing power
 - Satu rupiah di masa depan nilainya lebih rendah dibandingkan satu rupiah sekarang, atau dapat dikatakan nilainya turun (discounted).
-

Time Value of Money

Konsep nilai uang terhadap waktu

- ➔ Sejumlah uang yang nilainya dipengaruhi oleh perjalanan waktu, Dimana nilai gunanya/efektifnya sama, padahal nilai nominalnya tidak sama

EKIVALENSI

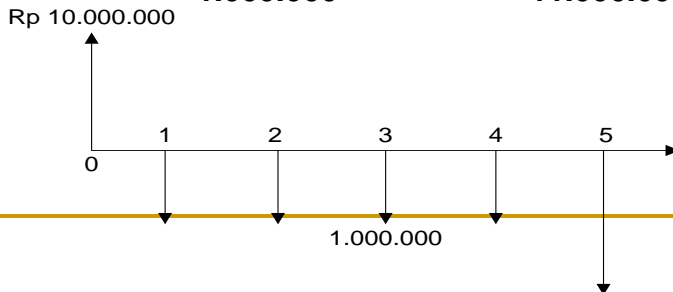
Ilustrasi ➔ Pinjaman yang berbunga

Contoh : Pokok pinjaman : Rp 10.000.000,-
 Jangka waktu : 5 tahun
 Suku bunga : 10 % / tahun

Ada 4 cara pengembalian :

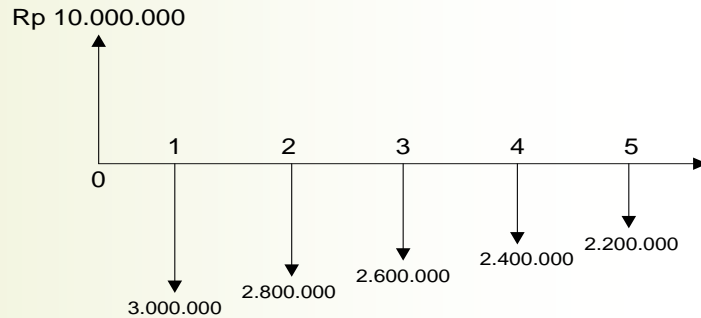
1. Tiap tahun dibayar bunganya saja, kemudian pada tahun terakhir dibayarkan pokok pinjaman

Tahun	Bunga	Jumlah	Angsuran	Sisa
0	0	0	0	10.000.000
1	1.000.000	11.000.000	1.000.000	10.000.000
2	1.000.000	11.000.000	1.000.000	10.000.000
3	1.000.000	11.000.000	1.000.000	10.000.000
4	1.000.000	11.000.000	1.000.000	10.000.000
5	1.000.000	11.000.000	11.000.000	0



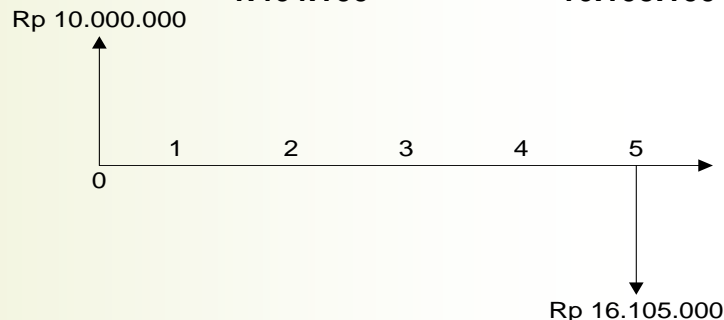
2. Tiap tahun dibayarkan bunganya dan angsuran sama rata dari pokok pinjaman

Tahun	Bunga	Jumlah	Angsuran	Sisa
0	0	0	0	10.000.000
1	1.000.000	11.000.000	3.000.000	8.000.000
2	800.000	8.800.000	2.800.000	6.000.000
3	600.000	6.600.000	2.600.000	4.000.000
4	400.000	4.400.000	2.400.000	2.000.000
5	200.000	2.200.000	2.200.000	0



3. Tiap tahun tidak dibayarkan apa-apa, baru pada tahun terakhir dibayarkan seluruh pokok pinjaman beserta seluruh bunga-bunganya

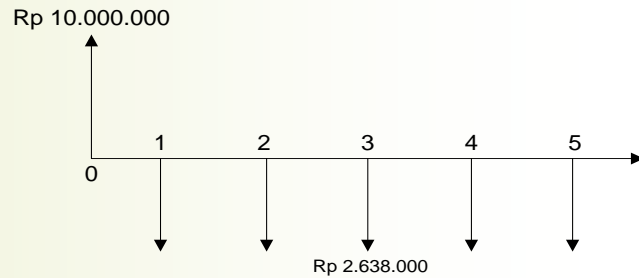
Tahun	Bunga	Jumlah	Angsuran	Sisa
0	0	0	0	10.000.000
1	1.000.000	11.000.000	0	11.000.000
2	1.100.000	12.100.000	0	12.100.000
3	1.210.000	13.310.000	0	13.310.000
4	1.331.000	14.641.000	0	14.641.000
5	1.464.100	16.105.100	16.105.100	0



4. Tiap tahun dibayarkan suatu angsuran yang sama besar

Tahun	Bunga	Jumlah	Angsuran	Sisa
0	0	0	0	10.000.000
1	1.000.000	11.000.000	2.638.000	8.362.000
2	836.200	9.198.200	2.638.000	6.560.200
3	656.020	7.216.220	2.638.000	4.578.220
4	457.822	5.036.042	2.638.000	2.398.042
5	239.804	2.637.846	2.638.000	(154)

Catatan : $A/P ; 10 \% ; 5 = 0,26380$



Bunga

- Tingkat bunga
 - Rasio dari bunga yang dibayarkan terhadap induk dalam suatu periode waktu dan biasanya dinyatakan dalam persentase dari induk
 - Jenis bunga dalam perhitungan nilai uang
 - Bunga sederhana (*simple interest*) / bunga nominal
 - Bunga majemuk (*compound interest*) / bunga efektif
-

Rumus-Rumus Bunga

Keterangan notasi

1. Interest (i) : suku bunga analisis (% per periode waktu)
2. Number of Year (n) : jangka waktu analisis (jumlah periode waktu)
3. Present (P) : - transaksi tunggal diawal jangka waktu analisis (periode ke 0)
- jumlah uang pada saat sekarang
4. Future (F) : jumlah uang pada akhir periode ke n, yang ekuivalen dengan P
5. Annual (A) : jumlah uang dari serangkaian transaksi seragam pada setiap akhir periode, dari periode ke 1 sampai dengan periode ke n, yang ekuivalen dengan P dan F

Hubungan antara P, F dan A bisa dicari dengan jalan memperkalikannya dengan faktor bunga yang sesuai

Ilustrasi Bunga Sederhana

- Pinjam Rp. 100.000 dengan bunga 10% per tahun selama 4 tahun dan dibayar diakhir periode

$$I = P \times i \times n = \text{Rp. } 100.000 \times 10\% \times 4 = \text{Rp. } 40.000$$

$$F = P + I = \text{Rp. } 100.000 + \text{Rp. } 40.000 = \text{Rp. } 140.000$$

Jumlah dibayar sebesar Rp. 140.000

Tahun	Pinjaman	Bunga	Hutang	Jumlah dibayar
0	100.000	0	100.000	0
1		10.000	110.000	0
2		10.000	120.000	0
3		10.000	130.000	0
4		10.000	140.000	140.000

Ilustrasi Bunga Majemuk

- Pinjam Rp. 100.000 dengan bunga 10% per tahun selama 4 tahun dan dibayar diakhir periode (pembayaran tunggal)

$$F = P(1 + i)^n = \text{Rp. } 100.000 (1 + 10\%)^4 = \text{Rp. } 146.410$$

Jumlah dibayar sebesar Rp. 146.410

Tahun	Pinjaman	Bunga	Hutang	Jumlah dibayar
0	100.000	0	100.000	0
1		10.000	110.000	0
2		11.000	121.000	0
3		12.100	133.100	0
4		13.310	146.410	146.410

Hubungan antara P dan F

$$n = 0 \rightarrow F_0 = P = P (1 + i)^0$$

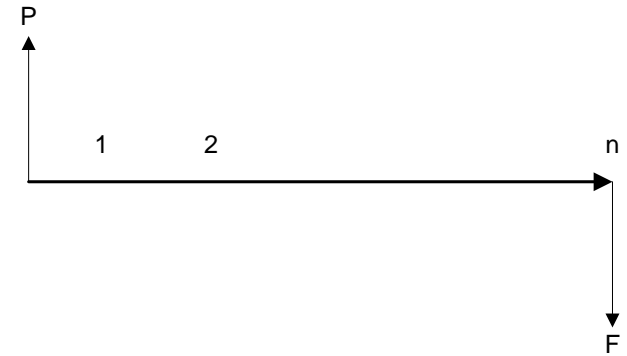
$$n = 1 \rightarrow F_1 = F_0 + F_0 i \\ = F_0 (1 + i) \\ = P (1 + i)^1$$

$$n = 2 \rightarrow F_2 = F_1 + F_1 i \\ = F_1 (1 + i) \\ = P (1 + i)(1 + i) \\ = P (1 + i)^2$$

$$n = 3 \rightarrow F_3 = F_2 + F_2 i \\ = F_2 (1 + i) \\ = P (1 + i)^2 (1 + i) \\ = P (1 + i)^3$$

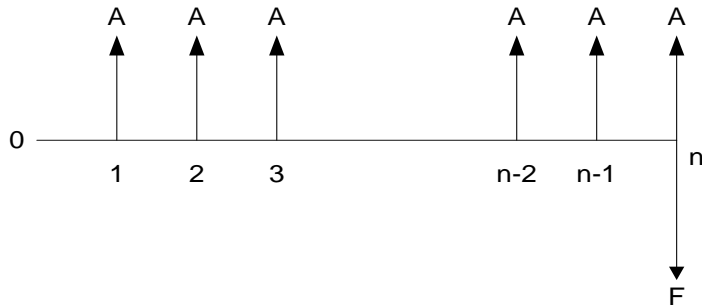
$$\dots\dots\dots n = n \rightarrow F_n = P (1 + i)^n$$

$$\boxed{F_n = P (1 + i)^n} \longleftrightarrow \boxed{P = F \left\{ \frac{1}{(1 + i)^n} \right\}}$$



Rumus simbolis
 $P = F (P/F ; i ; n)$
 $F = P (F/P ; i ; n)$

Hubungan antara F dan A



$$F = A + A(1+i) + A(1+i)^2 + \dots + A(1+i)^{n-3} + A(1+i)^{n-2} + A(1+i)^{n-1} \dots \dots \dots (1)$$

$$(1+i)F = A(1+i) + A(1+i)^2 + \dots + A(1+i)^{n-3} + A(1+i)^{n-2} + A(1+i)^{n-1} + A(1+i)^n \dots \dots \dots (2)$$

Pers 1 dan 2 dikurangkan

$$F - (1+i)F = A - A(1+i)^n \rightarrow F_i = -A + A(1+i)^n$$

$$F = \frac{-A + A(1+i)^n}{i}$$

$$= A \left\{ \frac{(1+i)^n - 1}{i} \right\}$$

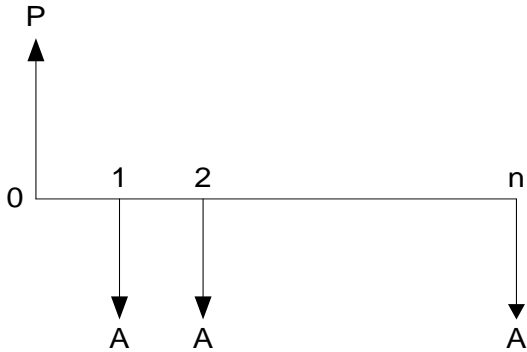
$$F = A \left\{ \frac{(1+i)^n - 1}{i} \right\}$$



$$A = F \left\{ \frac{i}{(1+i)^n - 1} \right\}$$

Rumus simbolis
 $A = F (A/F ; i ; n)$
 $F = A (F/A ; i ; n)$

Hubungan antara A dan P



$$\left. \begin{aligned} F &= P(1+i)^n \\ F &= A \left\{ \frac{(1+i)^n - 1}{i} \right\} \end{aligned} \right\} P(1+i)^n = A \left\{ \frac{(1+i)^n - 1}{i} \right\}$$

$$\boxed{P = A \left\{ \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \right\}} \longleftrightarrow \boxed{A = P \left\{ \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right\}}$$

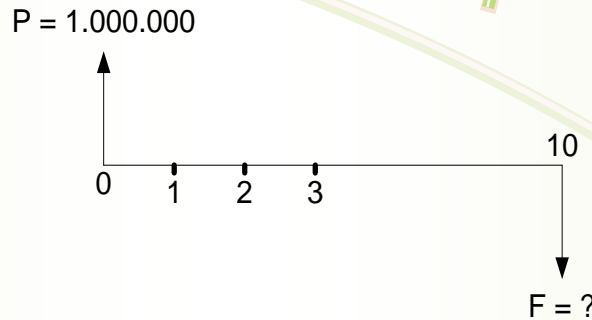
Rumus simbolis

$$P = A (P/A ; i ; n)$$

$$A = P (A/P ; i ; n)$$

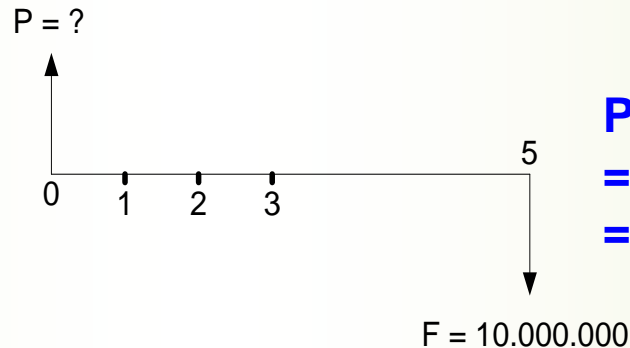
Contoh-Contoh Penggunaan Rumus Bunga

1. Bila Rp 1.000.000,- ditabung pada 1-1-2004 dengan suku bunga 15 % per tahun, berapa nilai tabungan itu pada 1-1-2014.



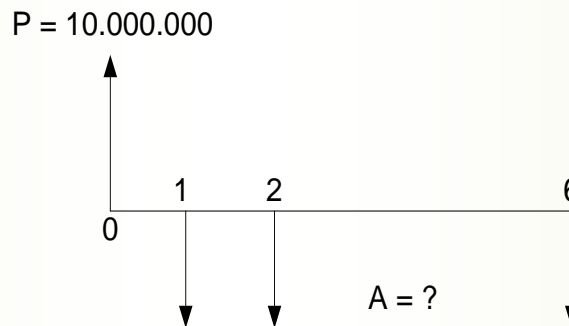
$$\begin{aligned} F &= P (F/P ; 15 \% ; 10) \\ &= 1.000.000 \times 4,0456 \\ &= \text{Rp } 4.045.600,- \end{aligned}$$

2. Berapa harus ditabung pada 1-1-2005, dengan suku bunga 20 % per tahun agar nilai tabungan itu menjadi Rp 10.000.000,- pada 1-1-2010.



$$\begin{aligned} P &= F (P/F ; 20 \% ; 5) \\ &= 10.000.000 \times 0,4019 \\ &= \text{Rp } 4.019.000,- \end{aligned}$$

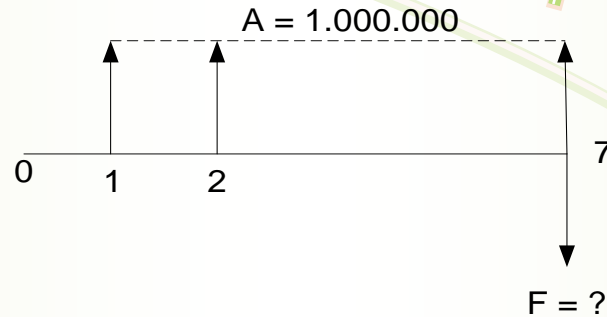
3. Bila Rp 10.000.000,- ditabung pada 1-1-2009 dengan suku bunga 25 % per tahun, berapa bisa diambil tiap tahun sejumlah yang sama besar dari 1-1-2010 sampai dengan 1-1-2015 sehingga sisa tabungan itu persis habis.



$$\begin{aligned} A &= P (A/P ; 25 \% ; 6) \\ &= 10.000.000 \times 0,33882 \\ &= \text{Rp } 3.388.200,- \end{aligned}$$

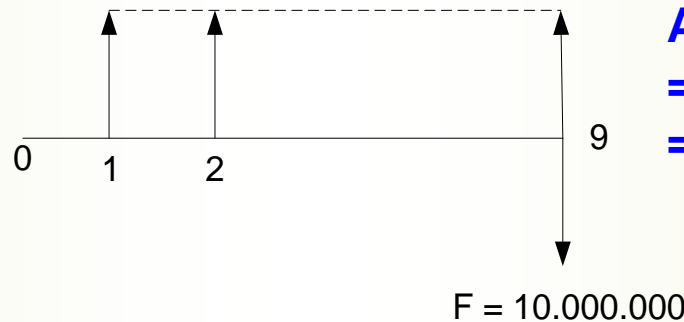
Contoh-Contoh Penggunaan Rumus Bunga

4. Bila Rp 1.000.000,- ditabung tiap tahun dari 1-1-2009 sampai 1-1-2015 dengan suku bunga 12 %/tahun, berapa nilai tabungan itu pada 2015



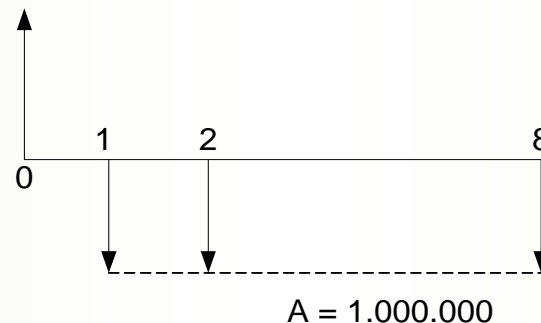
$$\begin{aligned} F &= A (F/A ; 12 \% ; 7) \\ &= 1.000.000 \times 10,089 \\ &= \text{Rp } 10.089.600,- \end{aligned}$$

5. Berapa harus ditabung sejumlah yang sama besar tiap tahun dari 1-1-1992 sampai 1-1-2000 dengan suku bunga 15 %/tahun, agar nilai tabungan itu menjadi Rp 10.000.000,- pada tahun 2000



$$\begin{aligned} A &= F (A/F ; 15 \% ; 9) \\ &= 10.000.000 \times 0,05957 \\ &= \text{Rp } 595.700,- \end{aligned}$$

6. Berapa harus ditabung pada 1-1-1997 dengan suku bunga 20 %/tahun, agar bisa diambil Rp 1.000.000,- tiap tahun dari 1-1-1998 sampai dengan 1-1-2005



$$\begin{aligned} P &= A (P/A ; 20 \% ; 8) \\ &= 1.000.000 \times 3,837 \\ &= \text{Rp } 3.837.000,- \end{aligned}$$

Hubungan antara P ; A ; F dengan menggunakan GRADIEN

$$F_1 = G \left\{ \frac{(1+i)^{n-1} - 1}{i} \right\}$$

$$F_2 = G \left\{ \frac{(1+i)^{n-2} - 1}{i} \right\}$$

·
·

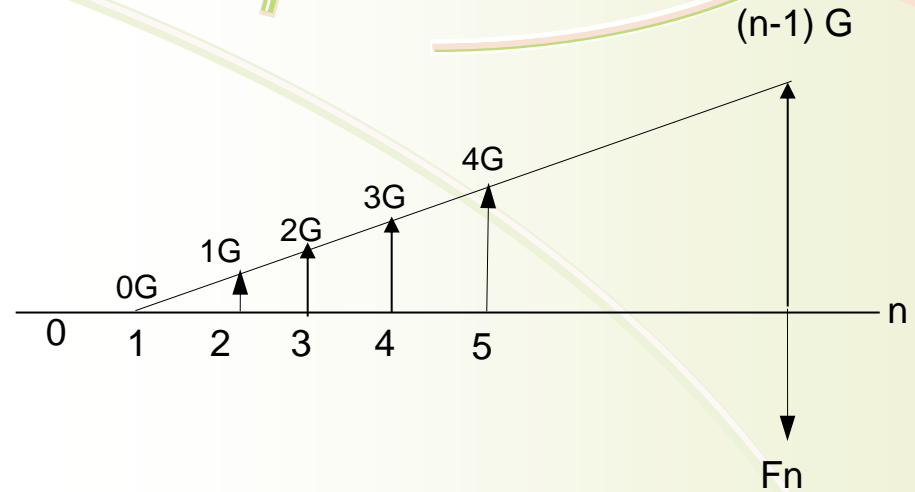
$$F_{n-2} = G \left\{ \frac{(1+i)^2 - 1}{i} \right\}$$

$$F_{n-1} = G \left\{ \frac{(1+i) - 1}{i} \right\}$$

$$F = G \left\{ \frac{(1+i)^{n-1} - 1}{i} \right\} + G \left\{ \frac{(1+i)^{n-2} - 1}{i} \right\} + \dots +$$

$$G \left\{ \frac{(1+i)^2 - 1}{i} \right\} + G \left\{ \frac{(1+i) - 1}{i} \right\} + \frac{G(n-1)}{i}$$

$$= \frac{G}{i} \left\{ (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \dots + (1+i)^2 + (1+i) + 1 \right\} - n \frac{G}{i}$$



$$F = \frac{G}{i} \left\{ \frac{(1+i)^n - 1}{i} \right\} - n \frac{G}{i}$$

$$F = G \left[\frac{1}{i} \left\{ \frac{(1+i)^n - 1}{i} \right\} - \frac{n}{i} \right]$$



(F/A ; i ; n)

$$F = G \left\{ \frac{1}{i} (F/A ; i ; n) - \frac{n}{i} \right\}$$

$$F = G \left\{ \frac{(F/A ; i ; n) - n}{i} \right\}$$

$$\boxed{F = G (F/G ; i ; n)}$$

$$F = G (F/G ; i ; n) \dots \dots \dots (1)$$

$$A = F (A/F ; i ; n) \dots \dots \dots (2)$$

Pers 1 dan 2

$$A = G (F/G ; i ; n) (A/F ; i ; n)$$

$$\boxed{A = G (A/G ; i ; n)}$$

Dengan analog diperoleh

$$\boxed{P = G (P/G ; i ; n)}$$

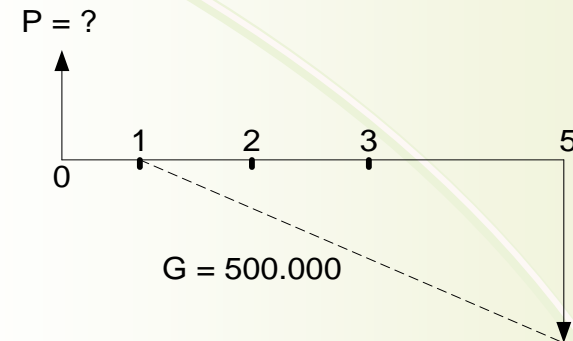
Contoh-Contoh Penggunaan Rumus Bunga

7. Berapa harus ditabung pada 1-1-2006 dengan suku bunga 15 % per tahun agar bisa diambil setiap tahun berturut-turut sbb :

Tanggal	Pengambilan
1-1-2007	Rp 500.000
1-1-2008	Rp 1.000.000
1-1-2009	Rp 1.500.000
1-1-2010	Rp 2.000.000

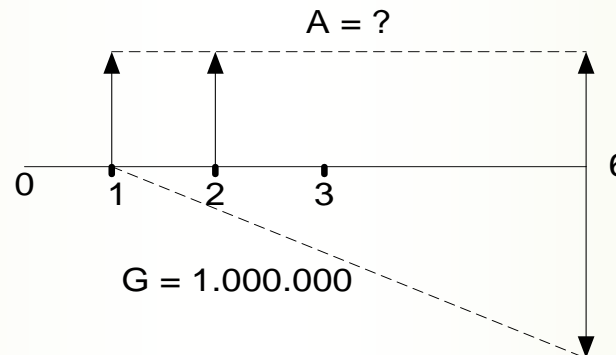
Sehingga sisa tabungan itu persis habis

$$\begin{aligned}
 P &= G (P/G ; 15 \% ; 5) \\
 &= 500.000 \times 5,7751 \\
 &= \text{Rp } 2.887.550,-
 \end{aligned}$$



8. Berapa harus ditabung sejumlah yang sama besar tiap tahun dari 1-1-2006 sampai dengan 1-1-2011 dengan suku bunga 20 % per tahun, agar bisa diambil tiap tahun berturut-turut sbb :

Tanggal	Pengambilan
1-1-2007	Rp 1.000.000
1-1-2008	Rp 2.000.000
1-1-2009	Rp 3.000.000
1-1-2010	Rp 4.000.000
1-1-2011	Rp 5.000.000



$$\begin{aligned}
 A &= G (A/G ; 20 \% ; 6) \\
 &= 1.000.000 \times 1,98 \\
 &= \text{Rp } 1.980.550,-
 \end{aligned}$$

Sehingga sisa tabungan itu persis habis

Contoh-Contoh Penggunaan Rumus Bunga

9. Berapa modal yang harus diinvestasikan sekarang dengan suku bunga 5 % per tahun, agar dapat disediakan Rp 12.000.000,- pada tahun ke 5; Rp 12.000.000,- pada tahun ke 10; Rp. 12.000.000,- pada tahun ke 15, dan Rp 12.000.000,- pada tahun ke 20

Jawab :

$$n_1 = 5 ;$$

$$F_1 = 12 \text{ juta}$$

$$n_2 = 10 ;$$

$$F_2 = 12 \text{ juta}$$

$$n_3 = 15 ;$$

$$F_3 = 12 \text{ juta}$$

$$n_4 = 20$$

$$F_4 = 12 \text{ juta}$$

$$P_1 = F_1 (P/F ; 5 \% ; 5) = 12.000.000 (0,7835) = 9.402.000,-$$

$$P_2 = F_2 (P/F ; 5 \% ; 10) = 12.000.000 (0,6139) = 6.367.000,-$$

$$P_3 = F_3 (P/F ; 5 \% ; 15) = 12.000.000 (0,4810) = 5.720.000,-$$

$$P_4 = F_4 (P/F ; 5 \% ; 20) = 12.000.000 (0,3769) = 4.523.000,-$$

Jadi modal yang harus diinvestasikan :

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = \text{Rp } 27.064.000$$

$$\text{Atau } F_1 = F_2 = F_3 = F_4$$

$$P = F (A/F ; 5 \% ; 5) (P/A ; 5 \% ; 20)$$

$$= 12.000.000 (0,18097) (12,462)$$

$$= \text{Rp } 27.063.000$$

Contoh-Contoh Penggunaan Rumus Bunga

10. Seseorang mendepositokan uang sekarang Rp 20.000.000,-; 2 tahun kemudian RP 15.000.000,-; 4 tahun kemudian RP 10.000.000,-. Suku bunga 8 % per tahun. Berapa jumlah total pada tahun ke 10 ?

Jawab :

$$n_1 = 10 ; \quad n_2 = 8 ; \quad n_3 = 6 ;$$

$$\begin{aligned} F &= F_1 + F_2 + F_3 \\ &= P_1 (F/P; 8 \% ; 10) + P_2 (F/P; 8 \% ; 8) + P_3 (F/P; 8 \% ; 6) \\ &= 20 \text{ juta } (2,1589) + 15 \text{ juta } (1,8509) + 10 \text{ juta } (1,5869) \\ &= \text{Rp } 86.810.000,- \end{aligned}$$

11. Seorang bapak memberi hadiah ultah sebesar RP 1.000.000,- per tahun dalam bentuk tabungan, yaitu dari ultah ke 1 - 18; suku bunga 20 % per tahun. Sejak ultah ke 19 – 25 si anak mengambil sejumlah Rp 3.000.000,- per tahun. Berapa kelebihan/kekurangan tabungan tersebut ?

Jawab :

$$\begin{aligned} F_1 &= A_1 (F/A ; 20 \% ; 18) \\ &= 1.000.000 (128,117) \\ &= \text{Rp } 128.117.000,- \end{aligned}$$

Contoh-Contoh Penggunaan Rumus Bunga

Seandainya tidak diambil sampai dengan ulrah ke 25 menjadi :

$$\begin{aligned} F_2' &= P_2' (F/P ; 20 \% ; 7) \\ &= 128.117.000 (3,5832) \\ &= \text{Rp } 459.068.830,- \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_2 &= A_2 (F/A ; 20 \% ; 7) \\ &= 3.000.000 (12,916) \\ &= \text{Rp } 38.748.000,- \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= F_2' - F_2 \\ &= 459.068.830 - 38.748.000 \\ &= \text{Rp } 420.320.830,- \end{aligned}$$

12. Biaya pengoperasian dan pemeliharaan suatu mesin pada akhir tahun pertama Rp 155.000.000,-, dan naik tiap tahun Rp 35.000.000,- selama 7 tahun. Berapa uang yang harus disediakan sekarang untuk pengoperasian dan pemeliharaan selama 8 tahun dengan suku bunga 6 % per tahun

Jawab :

$$\begin{aligned} P &= 155 \text{ juta } (P/A; 6 \% ; 8) + 35 \text{ juta } (P/G; 6 \% ; 8) \\ &= 155 \text{ juta } (6,210) + 35 \text{ juta } (19,842) \\ &= \text{Rp } 1.657.200.000,- \end{aligned}$$