MATRIKS

Matematika
FTP – UB
Mas’ud Effendi

Pokok Bahasan

- **Transpos suatu matriks**
- **Matriks khusus**
- **Determinan suatu matriks bujursangkar**
- **Invers suatu matriks bujursangkar**
- **Penyelesaian set persamaan linier**
- **Nilai-eigen dan vektor-eigen**

Pokok Bahasan

- **Transpos suatu matriks**
- **Matriks khusus**
- **Determinan suatu matriks bujursangkar**
- **Invers suatu matriks bujursangkar**
- **Penyelesaian set persamaan linier**
- **Nilai-eigen dan vektor-eigen**

Transpos Suatu Matriks

- Jika sebuah matriks disalingtukarkan antara baris dan kolomnya, maka matriks baru yang terbentuk disebut transpos dari matriks aslinya. Sebagi contoh:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \text{ then } \mathbf{A}^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 2 \\ 6 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

Pokok Bahasan

- Transpos suatu matriks
- **Matriks khusus**
- Determinan suatu matriks bujursangkar
- Invers suatu matriks bujursangkar
- Penyelesaian set persamaan linier
- Nilai-eigen dan vektor-eigen

Matriks Khusus

- Matriks bujursangkar
  - Matriks dengan orde *m x m*
  - Matriks bujursangkar dikatakan simetrik jika $a_{ij}=a_{ji}$ → **A**=**A**^{T}

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 8 & 9 \\ 5 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

  - Matriks bujursangkar dikatakan simetrik-miring jika $a_{ij}= -a_{ji}$ → **A**=-**A**^{T}

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & 9 \\ -5 & -9 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriks Khusus

- Matriks diagonal
  - Matriks bujursangkar yang semua elemennya nol kecuali elemen yang berada pada diagonal utamanya

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Matriks Khusus

- Matriks satuan/identitas (**I**)
  - Matriks diagonal yang elemen-elemen pada diagonal utamanya semuanya satu
  - Hasil kali antara **A** dengan **I** akan menghasilkan **A**

    A.I=A=I.A

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriks Khusus

- Matriks nol
  - Matriks yang semua elemennya adalah nol dan dinyatakan dengan **0**

$$\mathbf{0}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  - Maka **A.0=0**
  - Tetapi jika **A.B=0**, kita tidak dapat mengatakan **A=0** atau **B=0**

Pokok Bahasan

- **Transpos suatu matriks**
- **Matriks khusus**
- **Determinan suatu matriks bujursangkar**
- **Invers suatu matriks bujursangkar**
- **Penyelesaian set persamaan linier**
- **Nilai-eigen dan vektor-eigen**

Determinan Suatu Matriks Bujursangkar

- Determinan yang memiliki elemen yang sama dengan elemen matriksnya

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 3 \\ 8 & 4 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 3 \\ 8 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 150$$

- Determinan matriks bujursangkar memiliki nilai yang sama seperti nilai determinan matriks transposnya

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 3 \\ 8 & 4 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 0 & 8 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 5 & 0 & 8 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 150$$

- Matriks yang determinannya nol disebut matriks singular

Determinan Suatu Matriks Bujursangkar

- Kofaktor
  - Jika **A**=(a_{ij}) adalah suatu matriks bujursangkar, setiap elemen menghasilkan kofaktor, minor dari elemen dalam determinan beserta ‘tanda tempatnya’

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 3 \\ 8 & 4 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \det A = |A| = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 3 \\ 8 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 150$$

$$kofaktor$$

$$5 \rightarrow +(42-12) = +30$$

$$2 \rightarrow -(0-24) = +24$$

Determinan Suatu Matriks Bujursangkar

- Adjoin suatu matriks bujursangkar
  – Misal matriks bujursangkar **C** dibentuk dari matriks bujursangkar **A** dimana elemen-elemen **C** secara respektif merupakan kofaktor dari elemen **A**, maka:

$$\mathbf{A}=\left(a_{ij}\right) \text{ and } A_{ij} \text{ is the cofactor of } a_{ij} \text{ then } \mathbf{C}=\left(A_{ij}\right)$$

  – Transpos dari **C** disebut adjoin **A**, dinotasikan adj **A**.

Determinan Suatu Matriks Bujursangkar

- Contoh $A = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{5} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{6} \\ \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$
- Jika **C** adalah matriks kofaktor dari **A**,

  maka $C = \begin{pmatrix} -24 & 6 & 15 \\ 20 & -5 & -5 \\ 13 & 8 & -10 \end{pmatrix}$
- Adj **A** = $C^T = \begin{pmatrix} -24 & 20 & 13 \\ 6 & -5 & 8 \\ 15 & -5 & -10 \end{pmatrix}$

Pokok Bahasan

- Transpos suatu matriks
- Matriks khusus
- Determinan suatu matriks bujursangkar
- **Invers suatu matriks bujursangkar**
- Penyelesaian set persamaan linier
- Nilai-eigen dan vektor-eigen

Invers Suatu Matriks Bujursangkar

- Jika setiap elemen adjoin matriks bujursangkar **A** dibagi dengan determinan **A**, yaitu |**A**|, maka matriks yang dihasilkan disebut invers **A** dan dinyatakan dengan $\mathbf{A}^{-1}$.

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}}\left(\mathrm{adj}\,\mathbf{A}\right)$$

- *Note*: jika det **A**=0 maka invers tidak ada

Invers Suatu Matriks Bujursangkar

- $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{5} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{6} \\ \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \rightarrow detA = |A| = \begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{5} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{6} \\ \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{0} \end{vmatrix} = 45$
- Adj **A** = $C^T = \begin{pmatrix} -24 & 20 & 13 \\ 6 & -5 & 8 \\ 15 & -5 & -10 \end{pmatrix}$
- $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{24}{45} & \frac{20}{45} & \frac{13}{45} \\ \frac{6}{45} & -\frac{5}{45} & \frac{8}{45} \\ \frac{15}{45} & -\frac{5}{45} & -\frac{10}{45} \end{pmatrix} = \frac{1}{45} \begin{pmatrix} -24 & 20 & 13 \\ 6 & -5 & 8 \\ 15 & -5 & -10 \end{pmatrix}$

Invers Suatu Matriks Bujursangkar

- Hasil kali suatu matriks bujursangkar dengan inversnya, dengan urutan manapun faktor-faktornya ditulis, ialah matriks satuan dengan orde matriks yang sama:

$$\mathbf{A.A^{-1} = A^{-1}.A = I}$$

Pokok Bahasan

- Transpos suatu matriks
- Matriks khusus
- Determinan suatu matriks bujursangkar
- Invers suatu matriks bujursangkar
- **Penyelesaian set persamaan linier**
- Nilai-eigen dan vektor-eigen

Penyelesaian Set Persamaan Linier

- Set *n* persamaan linier simultan dengan *n* bilangan tidak diketahui

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_1
\end{aligned}
$$

- Dapat ditulis dalam bentuk matriks:

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}
\quad \text{that is} \quad \mathbf{A.x} = \mathbf{b}
$$

Penyelesaian Set Persamaan Linier

- Karena:

$$\mathbf{A.x} = \mathbf{b} \quad \text{then}$$

$$\mathbf{A}^{-1}.\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^{-1}.\mathbf{b} \quad \text{that is}$$

$$\mathbf{I.x} = \mathbf{A}^{-1}.\mathbf{b} \quad \text{and} \quad \mathbf{I.x} = \mathbf{x}$$

- Solusi:

$$\boxed{\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}.\mathbf{b}}$$

Penyelesaian Set Persamaan Linier

- Set persamaan linier

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$$
$$3x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 2$$
$$5x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -1$$

- Penyelesaian **A.x=b → x=A^{-1}.b**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & -2 \\ 5 & 3 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{35} \begin{pmatrix} -14 & -7 & 0 \\ -25 & 0 & 5 \\ 29 & 7 & -10 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{35} \begin{pmatrix} -70 \\ -105 \\ 140 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Penyelesaian Set Persamaan Linier

- Metode eliminasi Gauss untuk penyelesaian set persamaan linier
- Diberikan:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

- Buat matriks augmen **B**, dimana:

$$\mathbf{B} = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

Penyelesaian Set Persamaan Linier

Eliminasi elemen-elemen selain *a*11 dari kolom pertama dengan mengurangkan *a*21/*a*11 kali baris pertama dari baris kedua dan *a*31/*a*11 kali baris pertama dari baris ketiga, dst

Matriks baru yang terbentuk:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & c_{n2} & c_{n3} & \cdots & c_{nn} & d_n \end{array}\right)$$

Penyelesaian Set Persamaan Linier

- Proses ini kemudian diulangi untuk mengeliminasi c_{i2} dari baris yang ketiga dan yang berikutnya sampai diperoleh matriks dalam bentuk berikut:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \cdots & p_{n-3,n-2} & p_{n-2,n-1} & p_{n-2,n} & q_2 \\ 0 & \cdots & 0 & p_{n-1,n-1} & p_{n-1,n} & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & p_{nn} & q_n \end{array}\right)$$

Penyelesaian Set Persamaan Linier

- Matriks segitiga yang telah terbentuk dari matriks augmen, kita pisahkan kolom kanan kembali ke posisi semula

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & \cdots & p_{n-3,n-2} & p_{n-2,n-1} & p_{n-2,n} \\ 0 & \cdots & 0 & p_{n-1,n-1} & p_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$$

- Hasil ini memberikan solusi :

$$p_{nn} x_n = q_n \quad \text{so} \quad x_n = \frac{q_n}{p_{nn}}$$

Penyelesaian Set Persamaan Linier

- Set persamaan linier

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 3$$
$$2x_1 - x_2 - x_3 = 11$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = -5$$

- Dapat ditulis

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ -5 \end{pmatrix}$$

- Matriks augmennya menjadi

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 11 \\ 3 & 2 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

- Sekarang
  - Kurangkan 2/1 kali baris pertama dari baris kedua
  - Kurangkan 3/1 kali baris pertama dari baris ketiga

- Proses menghasilkan

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -5 & 5 & 5 \\ 0 & -4 & 10 & -14 \end{array}\right)$$

- Sekarang
  - Kurangkan $\frac{-4}{-5}$, yakni $\frac{4}{5}$, kali bari kedua dari baris ketiga

- Matriks segitiga terbentuk

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & -18 \end{array}\right)$$

- Dipisahkan kembali

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -18 \end{pmatrix}$$

- Sehingga x_3=-3, kemudian x_2=-4 dan x_1=2

Pokok Bahasan

- **Transpos suatu matriks**
- **Matriks khusus**
- **Determinan suatu matriks bujursangkar**
- **Invers suatu matriks bujursangkar**
- **Penyelesaian set persamaan linier**
- **Nilai-eigen dan vektor-eigen**

Nilai-eigen dan Vektor-eigen

- Persamaan dalam bentuk:

$$\mathbf{A}.\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$

- Dimana **A** adalah matriks bujursangkar dan λ adalah bilangan (skalar) yang punya solusi non-trivial, yakni ($\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$), untuk **x** disebut *vektor-eigen* atau *vektor karakterisik* **A**.
- Nilai λ disebut nilai-eigen, nilai karakteristik atau akar laten dari matriks A.

Nilai-eigen dan Vektor-eigen

- Dinyatakan sebagai set persamaan yang terpisah:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- yakni

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = \lambda x_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = \lambda x_2$$
$$\ldots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = \lambda x_n$$

Nilai-eigen dan Vektor-eigen

- Persamaan ini dapat disederhanakan menjadi:

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

- sehingga:

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}).\mathbf{x}=\mathbf{0}$$

- Yang berarti, solusi non-trivial:

$$|\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}|=0$$

Determinan karakteristik **A**

Nilai-eigen dan Vektor-eigen

- Nilai-eigen
  - Untuk mencari nilai-eigen dari:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

  - Selesaikan persamaan karakteristik |**A**-λ**I**|=**0**:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

  - sehingga: $(\lambda-1)(\lambda-5)=0$
  - Nilai-eigen $\lambda_1 = 1;\ \lambda_2 = 5$

Nilai-eigen dan Vektor-eigen

- Vektor-eigen
  - Untuk mencari vektor-eigen dari $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
  - Selesaikan persamaan $\mathbf{A.x} = \lambda \mathbf{x}$
  - Untuk nilai-eigen λ = 1 dan λ = 5

For $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ and so } x_2 = -3x_1 \text{ giving eigenvector } \begin{pmatrix} k \\ -3k \end{pmatrix}$$

For $\lambda = 5$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ and so } x_2 = x_1 \text{ giving eigenvector } \begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix}$$

Hasil Pembelajaran

- Memperoleh transpos suatu matriks
- Mengenali jenis-jenis matriks khusus
- Memperoleh determinan, kofaktor, dan adjoin matriks bujursangkar
- Memperoleh invers matriks non-singular
- Menggunakan matriks untuk menyelesaikan set persamaan linier dengan matriks invers
- Menggunakan metode eliminasi Gauss unntuk menyelesaikan set persamaan linier
- Menentukan nilai-eigen dan vektor-eigen

Referensi

- Stroud, KA & DJ Booth. 2003. *Matematika Teknik*. Erlangga. Jakarta