

# FUNGSI HIPERBOLIK

Matematika  
FTP – UB



# Pokok Bahasan

- Pendahuluan
- Grafik dari fungsi hiperbolik
- Menentukan nilai fungsi hiperbolik
- Fungsi hiperbolik invers
- Bentuk log dari fungsi hiperbolik invers
- Identitas hiperbolik
- Hubungan antara fungsi trigonometrik dan hiperbolik



# Pokok Bahasan

- Pendahuluan
- Grafik dari fungsi hiperbolik
- Menentukan nilai fungsi hiperbolik
- Fungsi hiperbolik invers
- Bentuk log dari fungsi hiperbolik invers
- Identitas hiperbolik
- Hubungan antara fungsi trigonometrik dan hiperbolik



# Pendahuluan

- Diketahui  $\cos\theta + j\sin\theta = e^{j\theta}$  and  $\cos\theta - j\sin\theta = e^{-j\theta}$
- Maka 
$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$
- Jika  $\theta = jx$  
$$\cos jx = \frac{e^{jjx} + e^{-jjx}}{2} = \frac{e^{-x} + e^x}{2}$$
- Bagian real ini merupakan bagian genap dari fungsi eksponensial yang disebut *kosinus hiperbolik*

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



# Pendahuluan

- Bagian ganjil dari fungsi hiperbolik disebut *sinus hiperbolik*

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

- Rasio *sinus hiperbolik* terhadap *kosinus hiperbolik* disebut *tangen hipebolik*

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$



# Pendahuluan

- Deret pangkat fungsi eksponensial

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad \text{and} \quad e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

- Sehingga diperoleh

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots \quad \text{and} \quad \sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$$



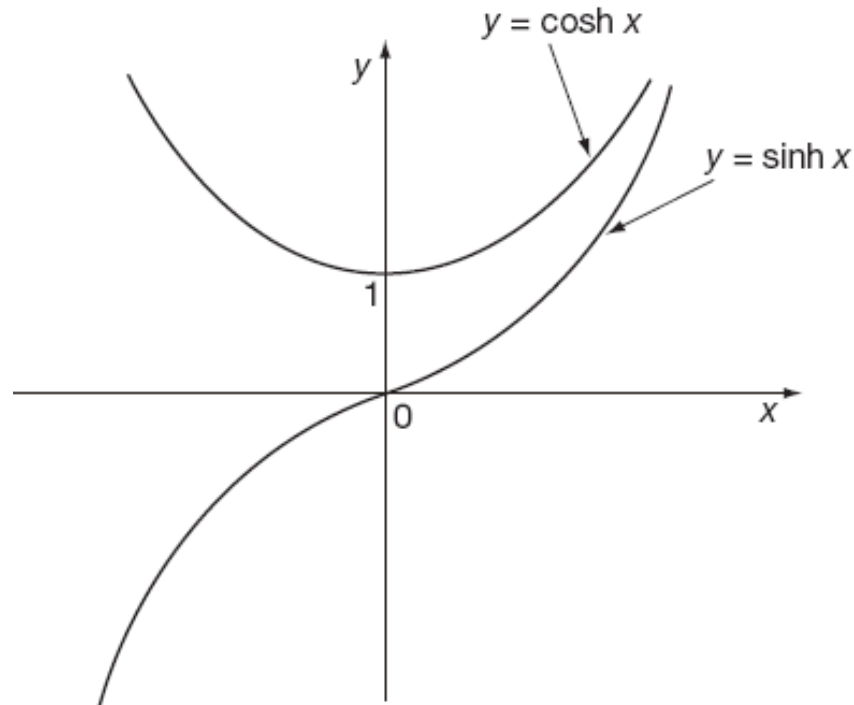
# Pokok Bahasan

- Pendahuluan
- Grafik dari fungsi hiperbolik
- Menentukan nilai fungsi hiperbolik
- Fungsi hiperbolik invers
- Bentuk log dari fungsi hiperbolik invers
- Identitas hiperbolik
- Hubungan antara fungsi trigonometrik dan hiperbolik



# Grafik dari Fungsi Hiperbolik

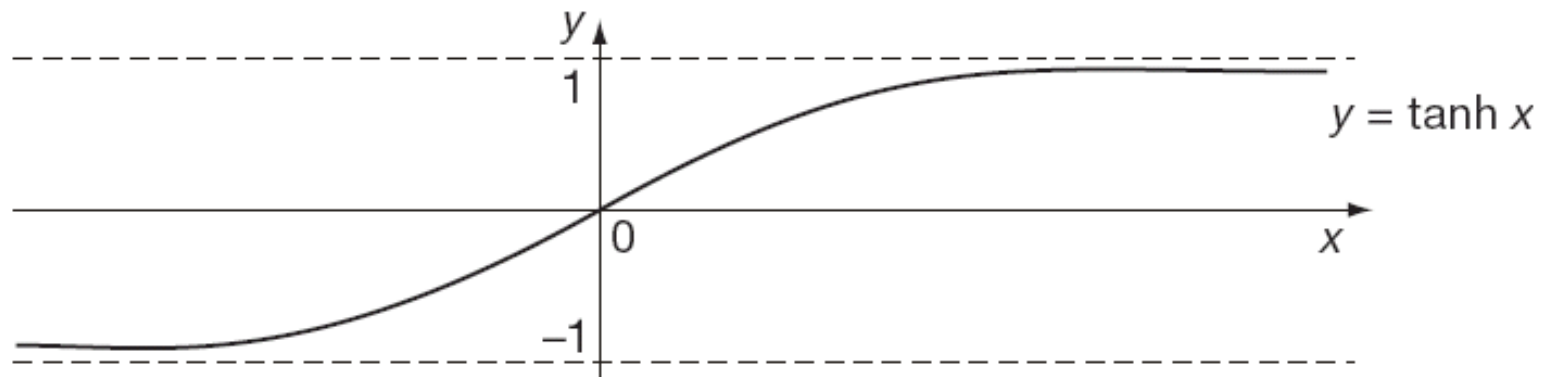
- Grafik *sinus hiperbolik* dan *kosinus hiperbolik*





# Grafik dari Fungsi Hiperbolik

- Grafik *tangen hiperbolik*



# Pokok Bahasan

- Pendahuluan
- Grafik dari fungsi hiperbolik
- Menentukan nilai fungsi hiperbolik
- Fungsi hiperbolik invers
- Bentuk log dari fungsi hiperbolik invers
- Identitas hiperbolik
- Hubungan antara fungsi trigonometrik dan hiperbolik



# Menentukan Nilai Fungsi Hiperbolik

- Nilai  $\sinh x$ ,  $\cosh x$  dan  $\tanh x$  dapat dicari dengan menggunakan kalkulator atau tombol eksponensial
- Sebagai contoh:

$$\sinh 1.275 = \frac{e^{1.275} - e^{-1.275}}{2} = \frac{3.579 - 0.279}{2} = 1.65 \text{ to 2dp}$$



# Pokok Bahasan

- Pendahuluan
- Grafik dari fungsi hiperbolik
- Menentukan nilai fungsi hiperbolik
- Fungsi hiperbolik invers
- Bentuk log dari fungsi hiperbolik invers
- Identitas hiperbolik
- Hubungan antara fungsi trigonometrik dan hiperbolik



# Fungsi Hiperbolik Invers

- Untuk mencari sebuah fungsi hiperbolik invers menggunakan kalkulator tanpa fasilitas yang dibutuhkan untuk menggunakan fungsi eksponensial
- Sebagai contoh, untuk mencari nilai  $\sinh^{-1} 1.475$  diperlukan terlebih dahulu mengetahui nilai  $x$  sehingga  $\sinh x = 1.475$ . Dengan cara:

$$e^x - \frac{1}{e^x} = 2.950 \quad \text{so that} \quad e^{2x} - 2.950e^x - 1 = 0$$

- Sehingga didapat:  $e^x = 3.257$  or  $-0.307$  so  $x = 1.1808$



# Pokok Bahasan

- Pendahuluan
- Grafik dari fungsi hiperbolik
- Menentukan nilai fungsi hiperbolik
- Fungsi hiperbolik invers
- Bentuk log dari fungsi hiperbolik invers
- Identitas hiperbolik
- Hubungan antara fungsi trigonometrik dan hiperbolik



# Bentuk Log dari Fungsi Hiperbolik Invers

- Jika  $y = \sinh^{-1}x$  maka  $x = \sinh y$ . maka:

$$e^y - e^{-y} = 2x \text{ so that } e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0$$

- Sehingga: 
$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

- Oleh karena itu, 
$$y = \sinh^{-1} x = \ln \left\{ x + \sqrt{x^2 + 1} \right\}$$



# Bentuk Log dari Fungsi Hiperbolik Invers

- Dengan cara yang sama

$$y = \cosh^{-1} x = \pm \ln \left\{ x + \sqrt{x^2 + 1} \right\}$$

$$y = \tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \left\{ \frac{1+x}{1-x} \right\}$$





# Pokok Bahasan

- Pendahuluan
- Grafik dari fungsi hiperbolik
- Menentukan nilai fungsi hiperbolik
- Fungsi hiperbolik invers
- Bentuk log dari fungsi hiperbolik invers
- **Identitas hiperbolik**
- Hubungan antara fungsi trigonometrik dan hiperbolik



# Identitas Hiperbolik

- Seperti rasio trigonometrik lainnya, terdapat fungsi-fungsi hiperbolik kebalikan

$$\operatorname{coth} x = \frac{1}{\operatorname{tanh} x}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\operatorname{cosh} x}$$

$$\operatorname{cosech} x = \frac{1}{\operatorname{sinh} x}$$



# Identitas Hiperbolik

- Dari definisi  $\cosh x$  dan  $\sinh x$

$$\begin{aligned}\cosh^2 x - \sinh^2 x &\equiv \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 \\ &\equiv \left( \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} \right) - \left( \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} \right) \\ &\equiv 1\end{aligned}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x \equiv 1$$



# Identitas Hiperbolik

- Dengan cara yang sama

$$\operatorname{sech}^2 x \equiv 1 - \tanh^2 x$$

$$\sinh 2x \equiv 2 \sinh x \cosh x$$

$$\operatorname{cosech}^2 x \equiv \operatorname{coth}^2 x - 1$$

$$\begin{aligned} \cosh 2x &\equiv \cosh^2 x + \sinh^2 x \\ &\equiv 1 + 2\sinh^2 x \\ &\equiv 2\cosh^2 x - 1 \end{aligned}$$

$$\tanh 2x \equiv \frac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x}$$



# Pokok Bahasan

- Pendahuluan
- Grafik dari fungsi hiperbolik
- Menentukan nilai fungsi hiperbolik
- Fungsi hiperbolik invers
- Bentuk log dari fungsi hiperbolik invers
- Identitas hiperbolik
- Hubungan antara fungsi trigonometrik dan hiperbolik



# Hubungan antara Fungsi Trigonometrik dan Hiperbolik

- Diketahui

$$\cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \quad \text{and} \quad j \sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2}$$

- Maka untuk  $\theta = jx$

$$\cos jx = \cosh x$$

$$j \sin x = \sinh jx$$



# Hubungan antara Fungsi Trigonometrik dan Hiperbolik

- Dengan cara yang sama

$$\cosh jx = \cos x$$

$$\sin jx = j \sinh x$$

- Lebih lanjut

$$\tanh jx = j \tan x$$

$$\tan jx = j \tanh x$$



# Hasil Pembelajaran

- Mendefinisikan fungsi hiperbolik dalam bentuk fungsi eksponensial
- Menyatakan fungsi hiperbolik sebagai deret pangkat
- Mengenal grafik fungsi hiperbolik
- Mencari nilai fungsi hiperbolik dan inversnya
- Menentukan bentuk logaritmik dari fungsi hiperbolik invers
- Membuktikan identitas trigonometrik hiperbolik
- Memahami hubungan antara fungsi trigonometrik melingkar dan hiperbolik

