

# TRIGONOMETRI

Matematika  
FTP – UB



# Pokok Bahasan

- Sudut
- Identitas Trigonometrik
- Rumus Trigonometrik
- Fungsi Trigonometrik



# Pokok Bahasan

- Sudut
- Identitas Trigonometrik
- Rumus Trigonometrik
- Fungsi Trigonometrik



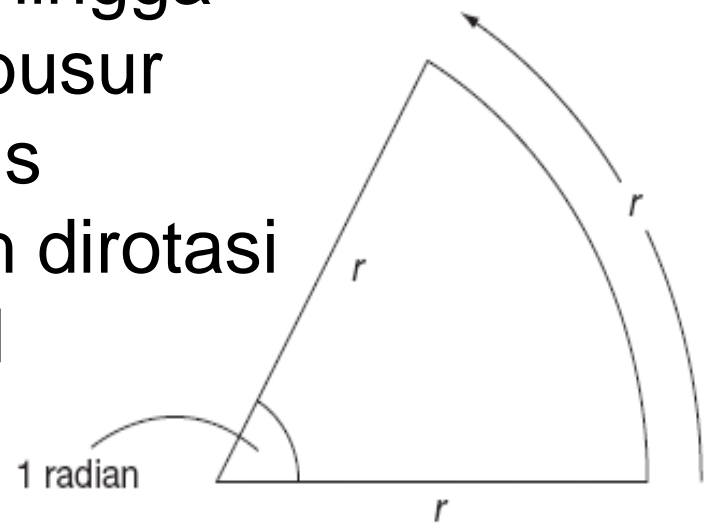
# Sudut

- Rotasi
  - Apabila suatu garis lurus dirotasi terhadap suatu titik, garis tersebut menyapu suatu sudut yang dapat diukur dalam *derajat* atau *radian*
  - Suatu garis lurus yang berotasi satu sudut penuh dan kembali ke posisi awal dikatakan telah dirotasi melalui 360 derajat –  $360^\circ$
  - Setiap derajat=60 menit dan setiap menit=60 detik



# Sudut

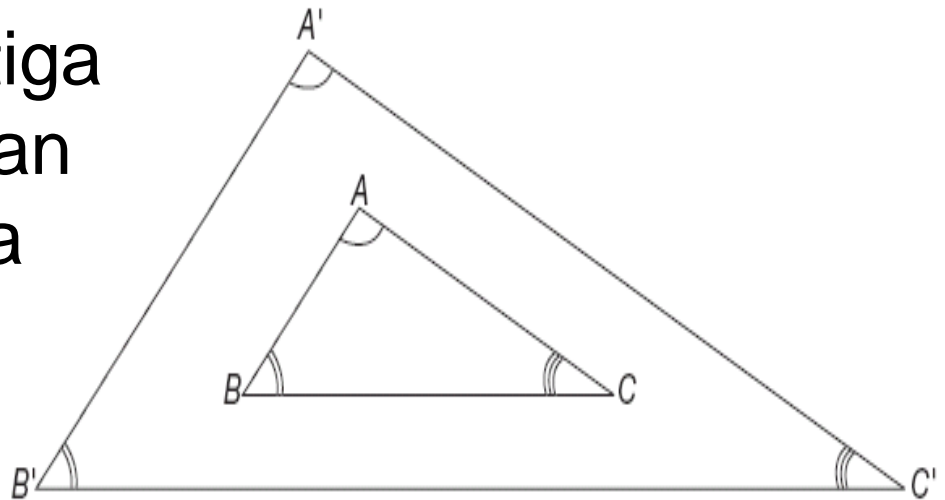
- Radian
  - Jika garis lurus yang panjangnya  $r$  berotasi pada salah satu ujungnya sehingga ujung lain membentuk busur yang panjangnya  $r$ , garis tersebut dikatakan telah dirotasi melalui 1 radian – 1 rad



# Sudut

- Segitiga
  - Semua segitiga memiliki bangun dan ukuran
  - Bangun segitiga ditentukan oleh ketiga sudutnya dan ukuran oleh panjang ketiga sisinya

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

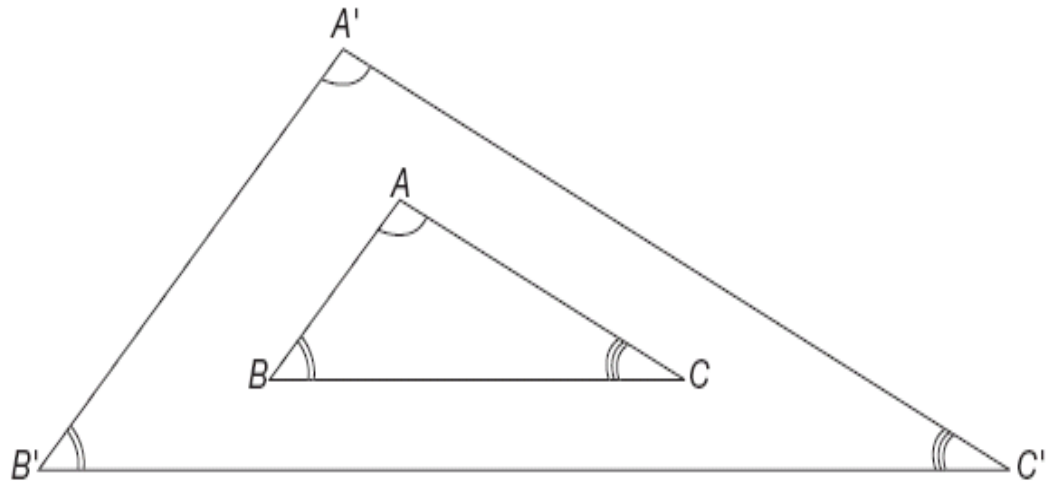


# Sudut

- Rasio Trigonometrik

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

so that:



$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'} \quad \text{and} \quad \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \quad \text{and} \quad \frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{B'C'}$$



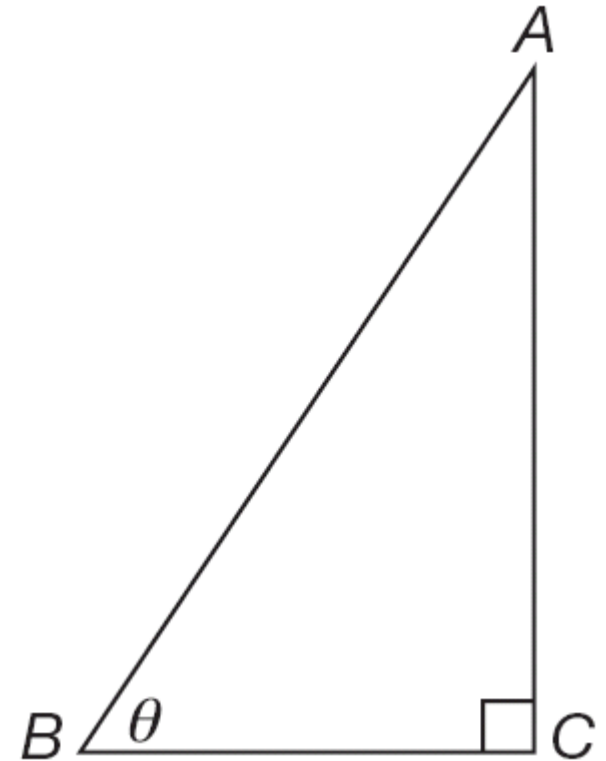
# Sudut

- Rasio Trigonometrik

*sine* of angle  $\theta = \frac{AC}{AB}$  - denoted by  $\sin \theta$

*cosine* of angle  $\theta = \frac{BC}{AB}$  - denoted by  $\cos \theta$

*tangent* of angle  $\theta = \frac{AC}{BC}$  - denoted by  $\tan \theta$





# Sudut

- Rasio kebalikan

*cosecant* of angle  $\theta = \frac{1}{\sin \theta}$  - denoted by  $\operatorname{cosec} \theta$

*secant* of angle  $\theta = \frac{1}{\cos \theta}$  - denoted by  $\sec \theta$

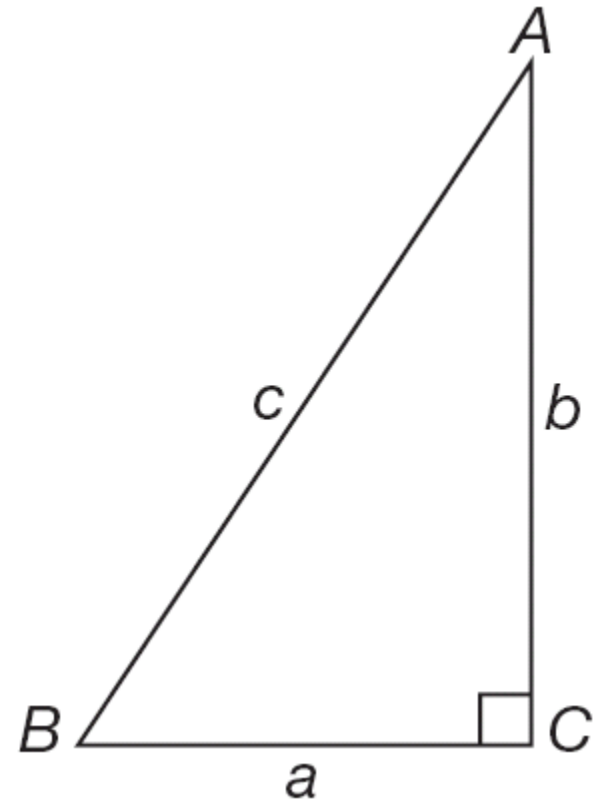
*cotangent* of angle  $\theta = \frac{1}{\tan \theta}$  - denoted by  $\cot \theta$



# Sudut

- Teorema Pythagoras
  - *Kuadrat hipotenusa suatu segitiga siku-siku sama dengan penjumlahan dari kuadrat kedua sisi lainnya*

$$a^2 + b^2 = c^2$$



# Sudut

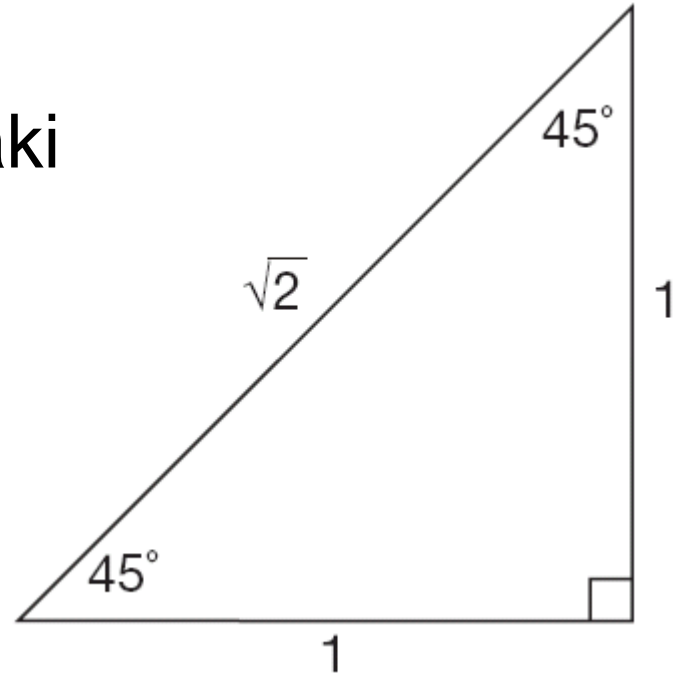
- Segitiga khusus
  - Segitiga siku-siku sama kaki

Angles measured in degrees:

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{and} \quad \tan 45^\circ = 1$$

Angles measured in radians:

$$\sin \pi/4 = \cos \pi/4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{and} \quad \tan \pi/4 = 1$$



# Sudut

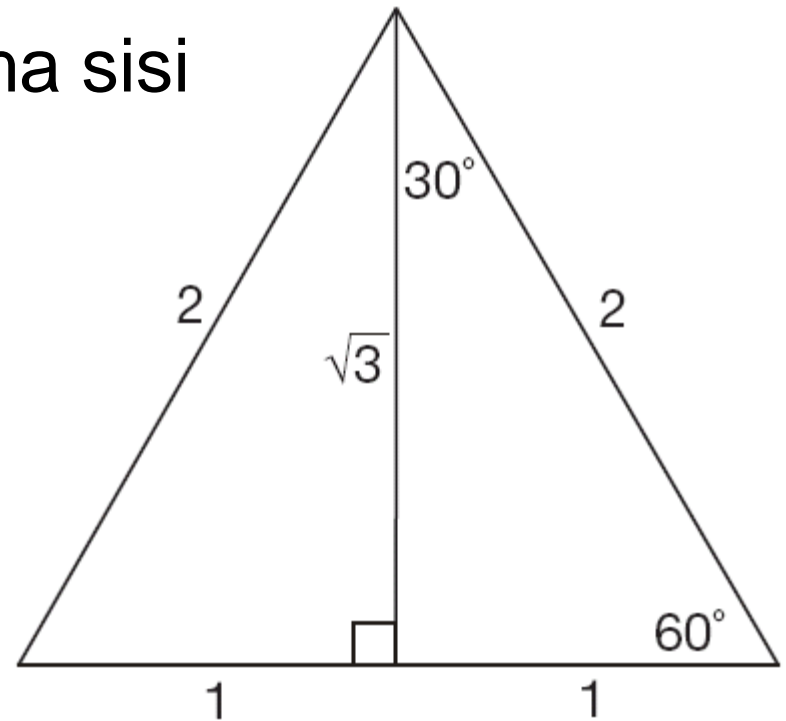
- Segitiga khusus
  - Segitiga setengah sama sisi

Angles measured in degrees:

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{1}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}$$



# Sudut

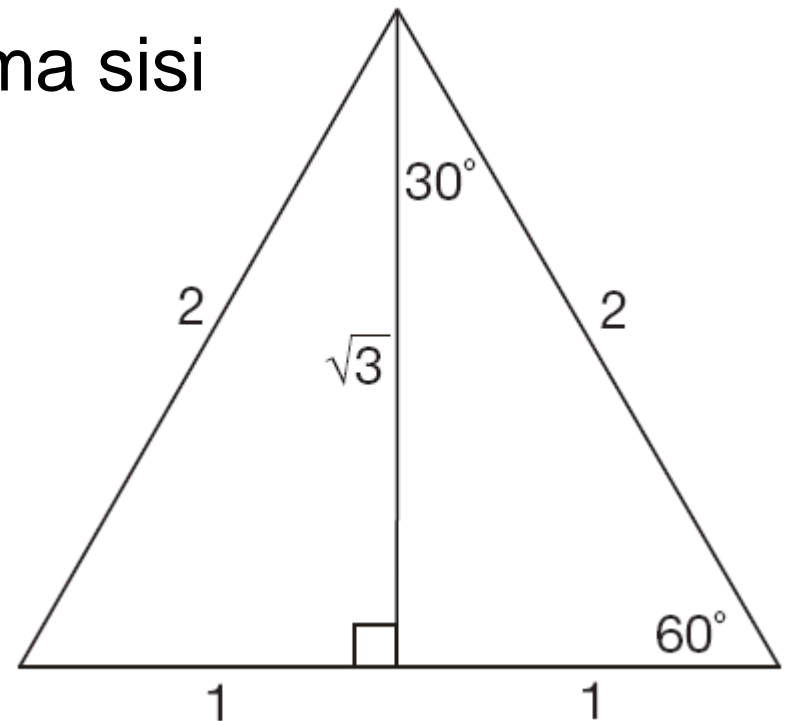
- Segitiga khusus
  - Segitiga setengah sama sisi

Angles measured in radians:

$$\sin \pi / 6 = \cos \pi / 3 = \frac{1}{2}$$

$$\sin \pi / 3 = \cos \pi / 6 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \pi / 3 = \frac{1}{\tan \pi / 6} = \sqrt{3}$$



# Pokok Bahasan

- Sudut
- Identitas Trigonometrik
- Rumus Trigonometrik
- Fungsi Trigonometrik



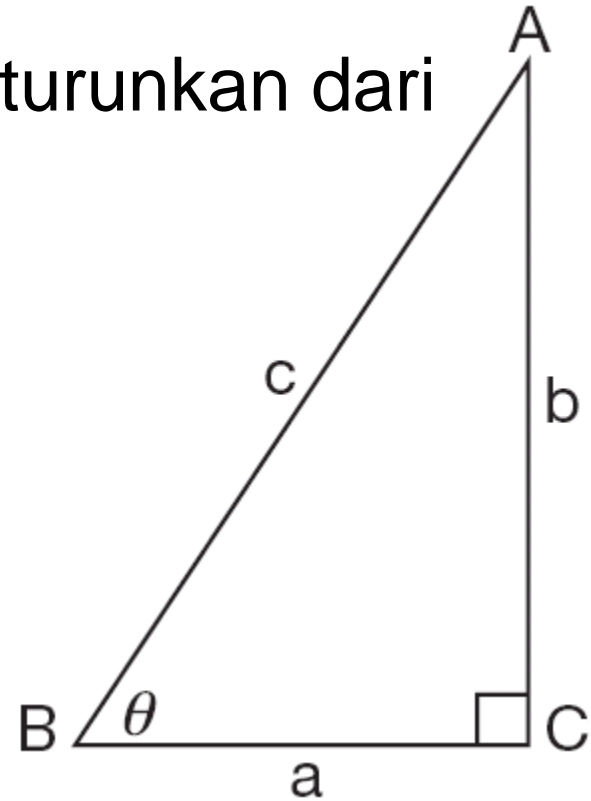
# Identitas Trigonometrik

- Identitas dasar
  - Identitas trigonometrik dasar diturunkan dari teorema Pythagoras

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \text{so} \quad \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$$

that is:

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$



# Identitas Trigonometrik

- Dua identitas lain
  - *Membagi identitas dasar dengan  $\cos^2 \theta$*

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \quad \text{so that} \quad \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

that is:

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$$





# Identitas Trigonometrik

- Dua identitas lain
  - *Membagi identitas dasar dengan  $\sin^2 \theta$*

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \quad \text{so that} \quad \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta}$$

that is:

$$\cot^2 \theta + 1 = \operatorname{cosec}^2 \theta$$



# Pokok Bahasan

- Sudut
- Identitas Trigonometrik
- Rumus Trigonometrik
- Fungsi Trigonometrik



# Rumus Trigonometrik

- Jumlah dan selisih sudut

$$\cos(\theta + \phi) = \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi$$

$$\cos(\theta - \phi) = \cos \theta \cos \phi + \sin \theta \sin \phi$$

$$\sin(\theta + \phi) = \sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi$$

$$\sin(\theta - \phi) = \sin \theta \cos \phi - \cos \theta \sin \phi$$

$$\tan(\theta + \phi) = \frac{\tan \theta + \tan \phi}{1 - \tan \theta \tan \phi}$$

$$\tan(\theta - \phi) = \frac{\tan \theta - \tan \phi}{1 + \tan \theta \tan \phi}$$



# Rumus Trigonometrik

- Sudut ganda

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta$$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$$

$$\sin 2\theta = 2\sin \theta \cos \theta$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$



# Rumus Trigonometrik

- Jumlah dan selisih rasio

$$\sin \theta + \sin \phi = 2 \sin \frac{\theta + \phi}{2} \cos \frac{\theta - \phi}{2}$$

$$\sin \theta - \sin \phi = 2 \cos \frac{\theta + \phi}{2} \sin \frac{\theta - \phi}{2}$$

$$\cos \theta + \cos \phi = 2 \cos \frac{\theta + \phi}{2} \cos \frac{\theta - \phi}{2}$$

$$\cos \theta - \cos \phi = -2 \sin \frac{\theta + \phi}{2} \sin \frac{\theta - \phi}{2}$$



# Rumus Trigonometrik

- Hasilkali rasio

$$2 \sin \theta \cos \phi = \sin(\theta + \phi) + \sin(\theta - \phi)$$

$$2 \cos \theta \cos \phi = \cos(\theta + \phi) + \cos(\theta - \phi)$$

$$2 \sin \theta \sin \phi = \cos(\theta - \phi) - \cos(\theta + \phi)$$



# Pokok Bahasan

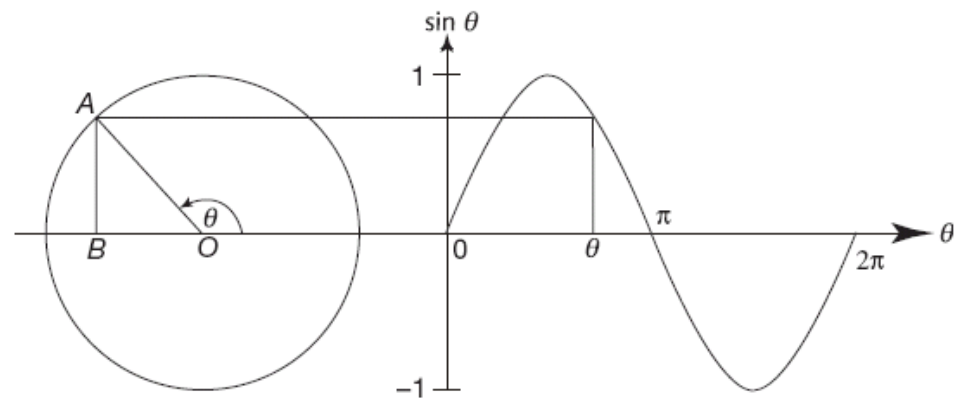
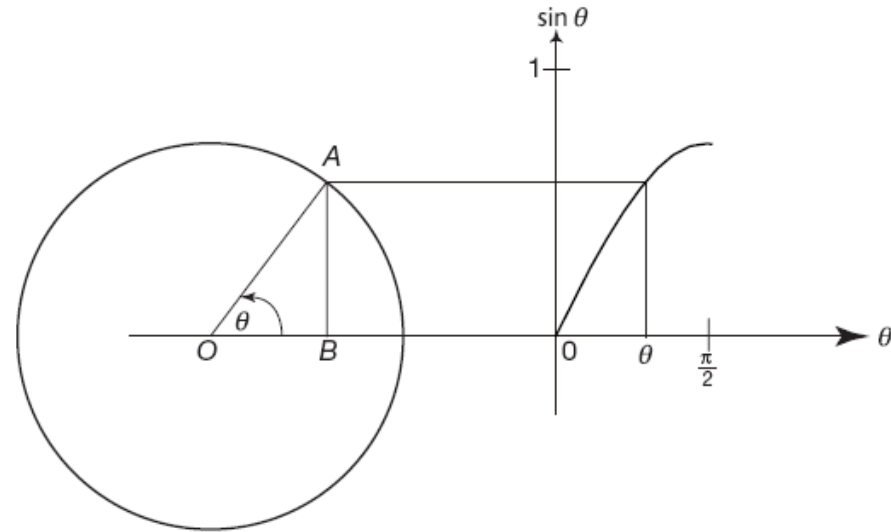
- Sudut
- Identitas Trigonometrik
- Rumus Trigonometrik
- Fungsi Trigonometrik



# Fungsi Trigonometrik

- Rotasi

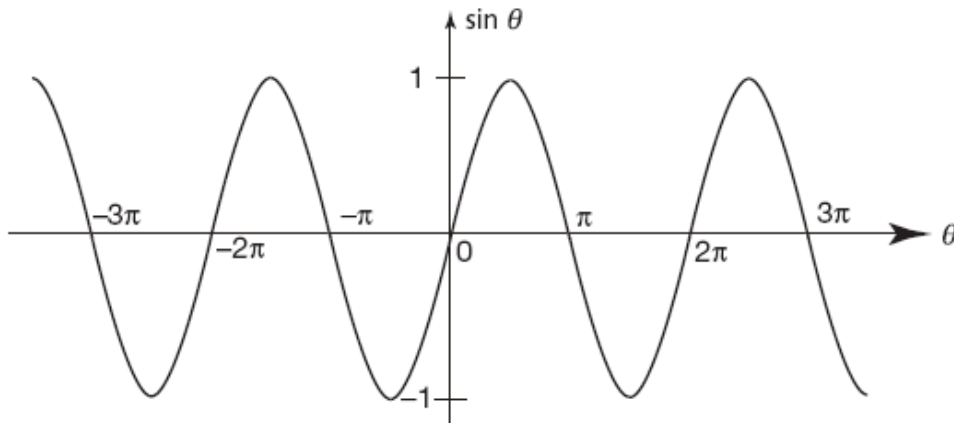
- Untuk sudut lebih besar dari nol dan kurang dari  $\pi/2$  radian, rasio trigonometrik didefinisikan dengan baik dan dapat diperluas ke fungsi trigonometrik yang berlaku untuk sembarang sudut



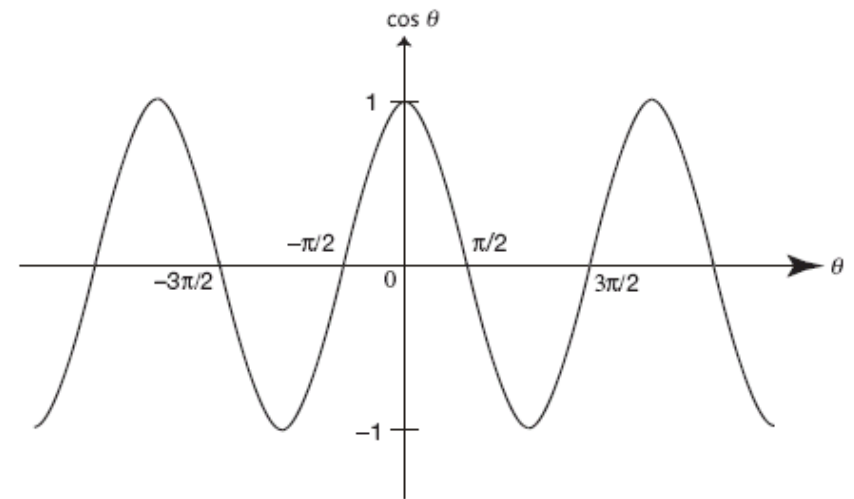


# Fungsi Trigonometrik

- Fungsi sinus



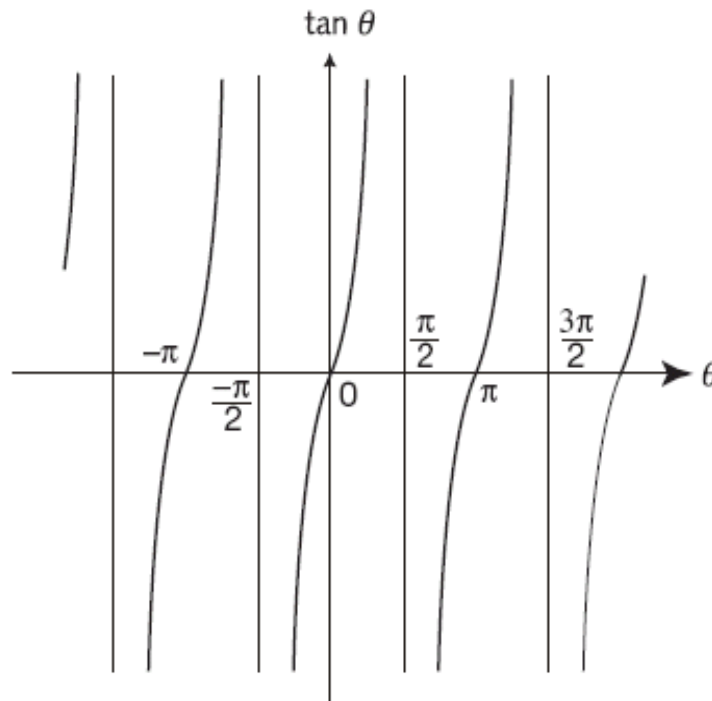
- Fungsi cosinus



# Fungsi Trigonometrik

- Tangen

– Rasio sinus terhadap kosinus  $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$



# Fungsi Trigonometrik

- Periode
  - Sembarang fungsi yang outputnya berulang dalam selang teratur inputnya disebut fungsi periodik, selang teratur input tersebut disebut periode fungsi tersebut
  - Fungsi sinus dan kosinus berulang bentuk pada setiap  $2\pi$
  - Fungsi tangen berulang dengan periode  $\pi$



# Fungsi Trigonometrik

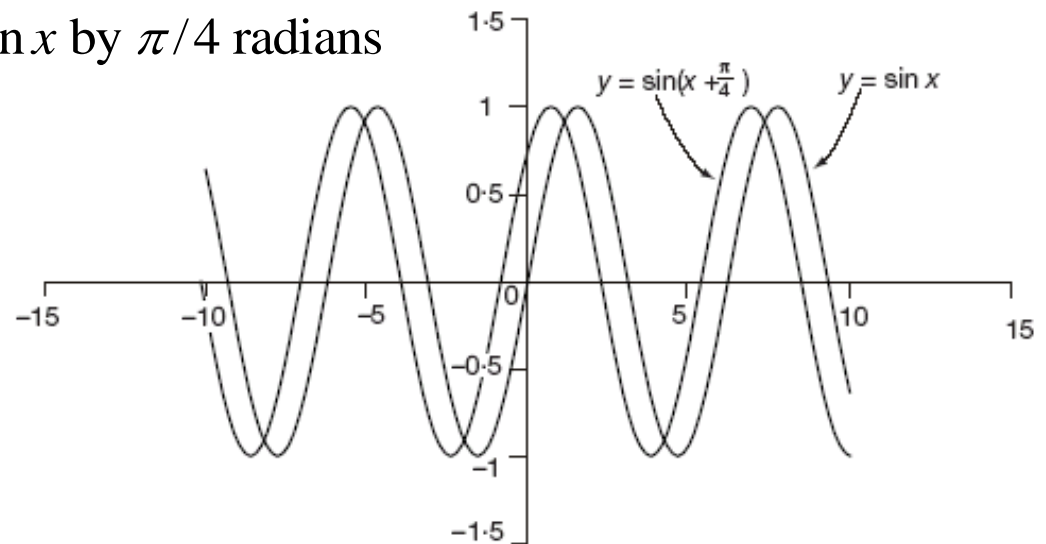
- Amplitudo
  - Setiap fungsi periodik memiliki satuan amplitudo yang diberikan sebagai selisih antara nilai maksimum dan nilai rata-rata output yang diperoleh dalam periode tunggal



# Fungsi Trigonometrik

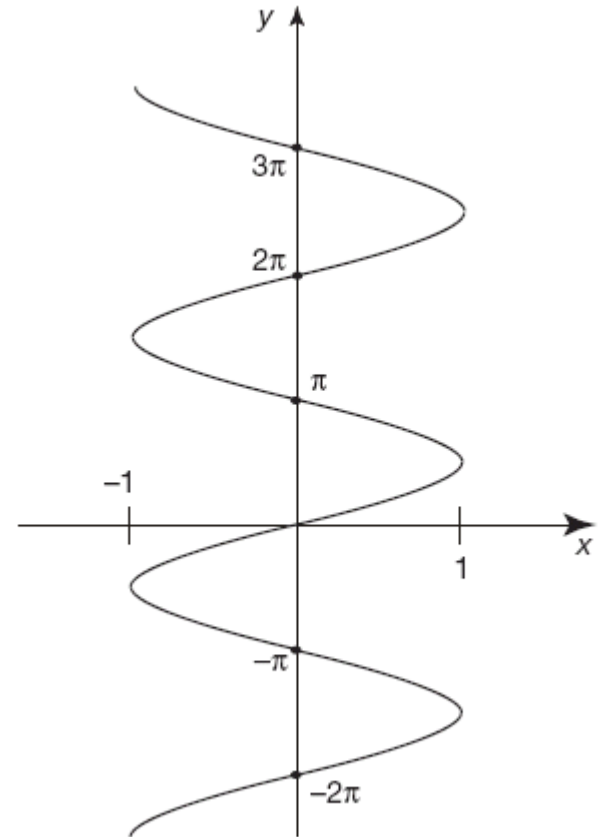
- Beda fase
  - Beda fase fungsi periodik adalah selang input yang dengan itu output mendahului atau terlambat terhadap *fungsi acuan*

$y = \sin(x + \pi/4)$  leads  $y = \sin x$  by  $\pi/4$  radians



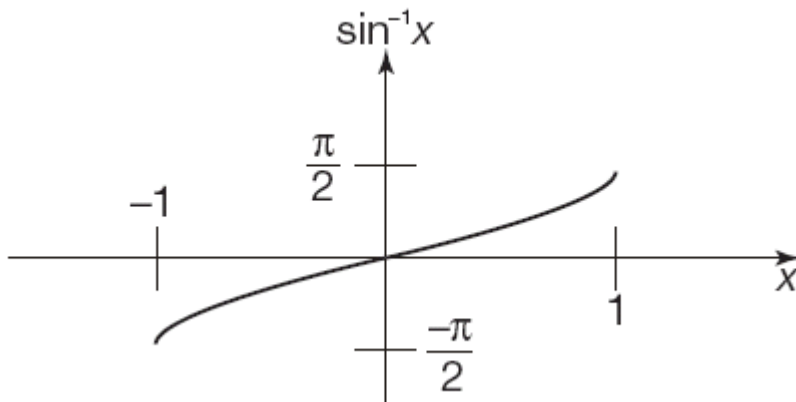
# Fungsi Trigonometrik

- Fungsi trigonometrik invers
  - Jika grafik  $y = \sin x$  dicerminkan pada bidang  $y = x$ , akan dihasilkan grafik invers fungsi sinus
  - Fungsi ini bukanlah suatu fungsi karena terdapat lebih dari satu nilai  $y$  yang bersesuaian dengan nilai  $x$  yang diketahui



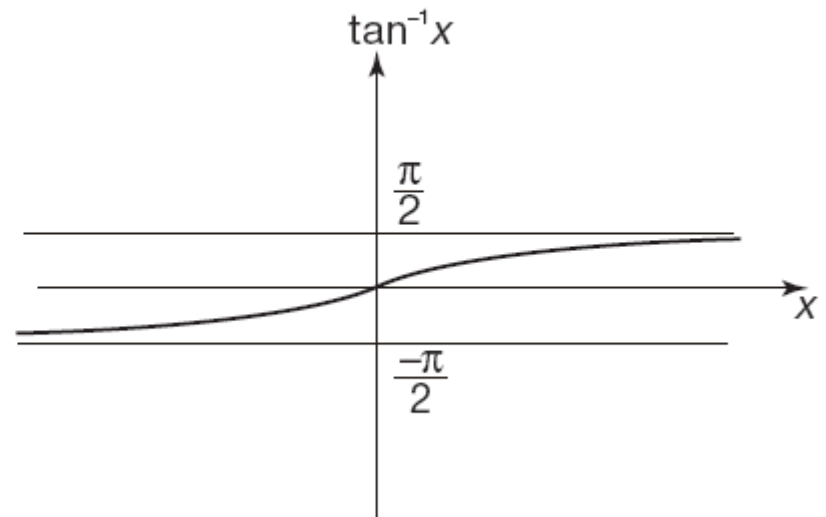
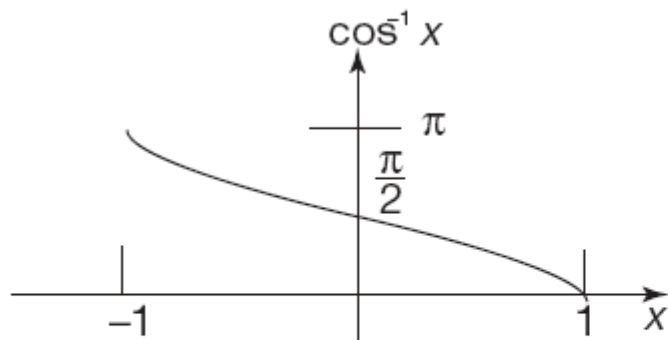
# Fungsi Trigonometrik

- Fungsi trigonometrik invers
  - Pemotongan bagian atas dan bawah grafik akan menghasilkan fungsi bernilai tunggal yang disebut *fungsi sinus invers*



# Fungsi Trigonometrik

- Fungsi trigonometrik invers
  - Dengan cara yang sama dapat diperoleh *fungsi cosinus invers* dan *fungsi tangen invers*





# Fungsi Trigonometrik

- Persamaan trigonometrik
  - Persamaan trigonometrik sederhana merupakan persamaan yang melibatkan hanya rumusan trigonometrik tunggal

$$\sin 3x = 0$$

with solution  $3x = n\pi$

so  $x = n\pi/3, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$



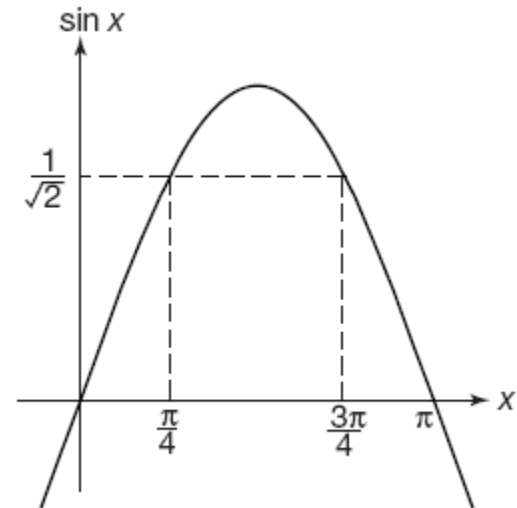
# Fungsi Trigonometrik

- Persamaan trigonometrik
  - Contoh lain

$$\sin 3x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

with solution  $3x = \frac{\pi}{4} \pm 2n\pi$  and  $3x = \frac{3\pi}{4} \pm 2n\pi$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

so  $x = \frac{\pi}{12} \pm 2n\pi$  and  $x = \frac{\pi}{4} \pm 2n\pi$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$



# Fungsi Trigonometrik

- Persamaan berbentuk  $a \cos x + b \sin x = c$ 
  - Persamaan berbentuk  $a \cos x + b \sin x = c$  dapat ditulis ulang
$$R \sin(x + \theta) = R\{\sin \theta \cos x + \sin x \cos \theta\} = a \cos x + b \sin x = c$$
so that  $R \sin \theta = a$  and  $R \cos \theta = b$ 
$$\text{giving } R = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ and } x = \sin^{-1}\left(\frac{c}{R}\right) - \theta \text{ where } \theta = \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$$
  - Solusi dapat dicari dengan grafik



# Hasil Pembelajaran

- Mengkonversi sudut-sudut yang diukur dalam derajat, menit dan detik ke derajat desimal
- Mengkonversi derajat ke radian dan sebaliknya
- Membuktikan identitas trigonometrik
- Mengembangkan fungsi trigonometrik dari rasio trigonometrik



# Referensi

- Stroud, KA & DJ Booth. 2003. *Matematika Teknik*. Erlangga. Jakarta

