

DERET

Matematika Industri 1
TIP – FP – UB



Pokok Bahasan

- Barisan
- Deret
- Deret aritmetik
- Deret geometrik
- Deret pangkat dari bilangan-bilangan asli
- Deret tak berhingga
- Nilai-nilai limit
- Deret konvergen dan deret divergen
- Uji konvergensi
- Deret secara umum. Konvergensi mutlak



Pokok Bahasan

- Barisan
- Deret
- Deret aritmetik
- Deret geometrik
- Deret pangkat dari bilangan-bilangan asli
- Deret tak berhingga
- Nilai-nilai limit
- Deret konvergen dan deret divergen
- Uji konvergensi
- Deret secara umum. Konvergensi mutlak



Barisan

- Barisan
 - Suatu set kuantitas, u_1, u_2, u_3, \dots , yang dinyatakan dalam suatu urutan dan setiap sukunya terbentuk menurut pola tertentu, dengan kata lain $u_r = f(r)$
 - Barisan berhingga hanya mengandung suku-suku yang berhingga banyaknya
 - Barisan tak berhingga tidak mempunyai suku terakhir



Pokok Bahasan

- Barisan
- Deret
- Deret aritmetik
- Deret geometrik
- Deret pangkat dari bilangan-bilangan asli
- Deret tak berhingga
- Nilai-nilai limit
- Deret konvergen dan deret divergen
- Uji konvergensi
- Deret secara umum. Konvergensi mutlak



Deret

- Suatu deret dibentuk oleh jumlah dari suku-suku suatu barisan
- Jika u_1, u_2, u_3, \dots adalah barisan, maka

$$S_1 = u_1$$

$$S_2 = u_1 + u_2$$

$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3$$

.....

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$$

merupakan deret



Pokok Bahasan

- Barisan
- Deret
- **Deret aritmetik**
- Deret geometrik
- Deret pangkat dari bilangan-bilangan asli
- Deret tak berhingga
- Nilai-nilai limit
- Deret konvergen dan deret divergen
- Uji konvergensi
- Deret secara umum. Konvergensi mutlak



Deret Aritmetik (Deret Hitung)

- Suku ke- n suatu deret aritmetik didefinisikan sebagai:

$$u_n = a + (n - 1)d$$

- Dimana a adalah suku pertama dan d adalah beda.
- Jumlah dari n suku pertama deret aritmetik S_n adalah:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + [n - 1]d)$$



Deret Aritmetik (Deret Hitung)

- Rata-rata aritmetik
 - Rata-rata aritmetik dua bilangan P dan Q adalah sebuah bilangan A sedemikian rupa $P + A + Q$
 - Membentuk deret aritmetik, sehingga
$$A - P = d \text{ and } Q - A = d \text{ so that } A - P = Q - A$$
$$2A = P + Q \text{ giving } A = \frac{P + Q}{2}$$
 - Rata-rata aritmetik dari dua bilangan adalah rata-rata kedua bilangan tersebut



Deret Aritmetik (Deret Hitung)

- Rata-rata aritmetik

- Penyisipan tiga rata-rata aritmetik, A, B, dan C, diantara dua bilangan P dan Q sdr

$$P + A + B + C + Q$$

$$A = P + \frac{Q - P}{4}$$

- Membentuk deret aritmetik, maka

$$Q - P = 4d \text{ so } d = \frac{Q - P}{4}$$

$$B = P + \frac{Q - P}{2}$$

$$C = P + 3\frac{Q - P}{4}$$



Pokok Bahasan

- Barisan
- Deret
- Deret aritmetik
- Deret geometrik
- Deret pangkat dari bilangan-bilangan asli
- Deret tak berhingga
- Nilai-nilai limit
- Deret konvergen dan deret divergen
- Uji konvergensi
- Deret secara umum. Konvergensi mutlak



Deret Geometrik (Deret Ukur)

- Bentuk umum deret geometrik dengan suku ke-n

$$u_n = ar^{n-1}$$

- Dimana a adalah suku pertama dan r adalah rasio
- Jumlah n suku pertama deret geometrik S_n

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$



Deret Geometrik (Deret Ukur)

- Rata-rata geometrik
 - Rata-rata geometrik dari dua bilangan, P dan Q, adalah A sdrs $P + A + Q$
 - Membentuk deret geometrik, sehingga

$$\frac{A}{P} = r \text{ and } \frac{Q}{A} = r \text{ so that } \frac{A}{P} = \frac{Q}{A}$$

$$A^2 = PQ \text{ giving } A = \sqrt{PQ}$$

- Rata-rata geometrik dari dua bilangan adalah akar dari hasil kali kedua bilangan



Deret Geometrik (Deret Ukur)

- Rata-rata geometrik
 - Penyisipan 3 rata-rata geometrik antara P dan Q sdr s membentuk deret geometrik

$$P + A + B + C + Q$$

$$\frac{Q}{P} = r^4 \quad \text{so} \quad r = \sqrt[4]{\frac{Q}{P}}$$

$$A = P \sqrt[4]{\frac{Q}{P}}$$

$$B = P \left(\sqrt[4]{\frac{Q}{P}} \right)^2$$

$$C = P \left(\sqrt[4]{\frac{Q}{P}} \right)^3$$



Pokok Bahasan

- Barisan
- Deret
- Deret aritmetik
- Deret geometrik
- Deret pangkat dari bilangan-bilangan asli
- Deret tak berhingga
- Nilai-nilai limit
- Deret konvergen dan deret divergen
- Uji konvergensi
- Deret secara umum. Konvergensi mutlak



Deret Pangkat dari Bilangan-bilangan Asli

- Deret

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + n = \sum_{r=1}^n r$$

- Merupakan deret aritmetik dengan $a=1$ dan $d=1$, sehingga

$$\sum_{r=1}^n r = \frac{n}{2}(2a + [n-1]d) = \frac{n(n+1)}{2}$$



Deret Pangkat dari Bilangan-bilangan Asli

- Deret semisal

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \dots + n^2 = \sum_{r=1}^n r^2$$

- Dinotasikan

$$(r+1)^3 = r^3 + 3r^2 + 3r + 1$$

- sehingga

$$\sum_{r=1}^n [(r+1)^3 - r^3] = 3 \sum_{r=1}^n r^2 + 3 \sum_{r=1}^n r + \sum_{r=1}^n 1$$



Deret Pangkat dari Bilangan-bilangan Asli

- Jika dilanjutkan

$$\sum_{r=1}^n [(r+1)^3 - r^3] = (n+1)^3 - 1^3 = n^3 + 3n^2 + 3n \text{ and } \sum_{r=1}^n 1 = n$$

$$3\sum_{r=1}^n r^2 + 3\sum_{r=1}^n r + n = n^3 + 3n^2 + 3n \text{ where } \sum_{r=1}^n r = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{r=1}^n r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$



Deret Pangkat dari Bilangan-bilangan Asli

- Jumlah dari pangkat tiga-pangkat tiga menggunakan identitas

$$\sum_{r=1}^n r^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$



Pokok Bahasan

- Barisan
- Deret
- Deret aritmetik
- Deret geometrik
- Deret pangkat dari bilangan-bilangan asli
- Deret tak berhingga
- Nilai-nilai limit
- Deret konvergen dan deret divergen
- Uji konvergensi
- Deret secara umum. Konvergensi mutlak



Deret Tak Berhingga

- Deret tak berhingga merupakan deret dengan banyak sukunya tak berhingga
- Deret geometrik dengan $a=1$ dan $r=1/2$ dengan jumlah n suku pertama

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$= \frac{1(1 - [1/2]^n)}{1 - 1/2}$$
$$= 2(1 - 1/2^n)$$



Deret Tak Berhingga

- Jika n sangat besar, maka $\frac{1}{2^n}$ akan sangat kecil dan mendekati nol as $n \rightarrow \infty$ so $\frac{1}{2^n} \rightarrow 0$
- Dengan kata lain $\frac{1}{2^n} \rightarrow 0$ so $S_n = 2(1 - \frac{1}{2^n}) \rightarrow 2$
- Kita katakan limit S_n seiring n mendekati tak berhingga adalah 2

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S_\infty = 2$$



Deret Tak Berhingga

- Terkadang deret tak berhingga tidak memiliki limit $1, 3, 5, 7, \dots$
- Sebuah deret aritmetik dengan $a=1$ dan $d=2$:
$$S_n = 1 + 3 + 5 + 7, \dots, +2n-1$$
$$= \frac{n}{2} (2 + [n-1]2)$$
$$= n^2$$

as $n \rightarrow \infty$ so $S_n = n^2 \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S_\infty = \infty$$



Pokok Bahasan

- Barisan
- Deret
- Deret aritmetik
- Deret geometrik
- Deret pangkat dari bilangan-bilangan asli
- Deret tak berhingga
- Nilai-nilai limit
- Deret konvergen dan deret divergen
- Uji konvergensi
- Deret secara umum. Konvergensi mutlak



Nilai-nilai Limit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g(n) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \pm\infty \quad \text{and} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g(n) = \pm\infty$$

as $n \rightarrow \infty$ so $\frac{1}{n} \rightarrow 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+3}{2n-7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5+3/n}{2-7/n} \quad \text{dividing top and bottom by } n$$

$$= \frac{5+0}{2-0}$$

$$= \frac{5}{2}$$



Pokok Bahasan

- Barisan
- Deret
- Deret aritmetik
- Deret geometrik
- Deret pangkat dari bilangan-bilangan asli
- Deret tak berhingga
- Nilai-nilai limit
- Deret konvergen dan deret divergen
- Uji konvergensi
- Deret secara umum. Konvergensi mutlak



Deret Konvergen dan Deret Divergen

- Suatu deret dimana jumlah (S_n) dari n suku dari deret tersebut cenderung mendekati suatu nilai tertentu, yaitu ketika, $n \rightarrow \infty$ disebut deret konvergen
- Jika S_n tidak mendekati suatu nilai tertentu ketika $n \rightarrow \infty$, deret ini disebut deret divergen
- Uji konvergensi diperlukan jika sulit mencari rumus untuk S_n



Pokok Bahasan

- Barisan
- Deret
- Deret aritmetik
- Deret geometrik
- Deret pangkat dari bilangan-bilangan asli
- Deret tak berhingga
- Nilai-nilai limit
- Deret konvergen dan deret divergen
- Uji konvergensi
- Deret secara umum. Konvergensi mutlak



Uji Konvergensi

- Uji 1: Suatu deret tidak mungkin konvergen terkecuali suku-sukunya akhirnya mendekati nol; lebih tepatnya, terkecuali $\lim_{n \rightarrow \infty} \{u_n\} = 0$
- Jika $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$
- Maka S_n divergen jika $\lim_{n \rightarrow \infty} \{u_n\} \neq 0$
- Pengecualian:

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \right\} = 0$$



Uji Konvergensi

- Uji 2: Uji Komparasi (*Comparasion Test*)
 - Suatu deret yang terdiri dari suku-suku positif akan konvergen jika suku-sukunya lebih kecil daripada suku-suku padanannya dari suatu deret positif lain yang sudah diketahui konvergen. Dengan cara serupa, suatu deret akan divergen jika suku-sukunya lebih besar daripada suku-suku padanannya dari suatu deret lain yang diketahui divergen.



Uji Konvergensi

- Uji 2:

- Konvergen jika $p > 1$

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^p}$$

- Divergen jika $p \leq 1$

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^p}$$



Uji Konvergensi

- Uji 3: Uji rasio D'Alembert untuk suku-suku positif
- Jika $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_n + \dots = \sum_{r=1}^{\infty} u_r$ merupakan deret dengan suku-suku positif

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, the series converges

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, the series diverges

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, the series may converge or diverge



Pokok Bahasan

- Barisan
- Deret
- Deret aritmetik
- Deret geometrik
- Deret pangkat dari bilangan-bilangan asli
- Deret tak berhingga
- Nilai-nilai limit
- Deret konvergen dan deret divergen
- Uji konvergensi
- Deret secara umum. Konvergensi mutlak



Deret Secara Umum Konvergensi Mutlak

- Jika deret $\sum_{r=1}^{\infty} u_r$ konvergen, maka deret $\sum_{r=1}^{\infty} |u_r|$ sangat mungkin tidak konvergen
- Jika $\sum_{r=1}^{\infty} |u_r|$ deret konvergen, maka $\sum_{r=1}^{\infty} u_r$ dipastikan konvegen
- Jika $\sum_{r=1}^{\infty} |u_r|$ konvergen, maka deret $\sum_{r=1}^{\infty} u_r$ dikatakan *konvergen mutlak*
- Jika $\sum_{r=1}^{\infty} |u_r|$ tidak konvergen, tapi $\sum_{r=1}^{\infty} u_r$ konvergen, maka $\sum_{r=1}^{\infty} u_r$ *konvergen bersyarat*



Hasil Pembelajaran

- Menggunakan deret aritmetik dan deret geometrik
- Menggunakan deret pangkat dan bilangan-bilangan asli
- Menentukan nilai limit dari deret aritmetik dan deret geometrik
- Menentukan nilai limit dari bentuk-bentuk tak tentu yang sederhana
- Menerapkan berbagai uji konvergensi pada deret tak berhingga
- Membedakan antara konvergensi mutlak dan konvergensi bersyarat

